



**João Paulo Félix Sanches**

Licenciado

# **Controlo de Vibrações em Pontes Pedonais Sujeitas a Acções de Multidões**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre  
em Engenharia Civil - Perfil de Estruturas

Orientador: Doutora Ildi Cismasiu

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Corneliu Cismasiu  
Arguente: Prof. Doutor Filipe Santos  
Vogal: Prof.<sup>a</sup> Doutora Ildi Cismasiu



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Maio de 2012**



“Copyright” João Paulo Félix Sanches, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.





# Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de expressar o meu agradecimento à Doutora Ildi Cismasiu pela disponibilidade e orientação demonstrada na elaboração deste trabalho.

Ao Eng. João Guedes, da Sipca Consultores e Engenharia, S.A. e ao Eng. Fernando Félix, da Metaloviana, S.A., pelos esclarecimentos e cedência dos elementos que se revelaram essenciais para a elaboração deste trabalho.

Ao professor Filipe Santos pela sua disponibilidade e ajuda na elaboração dos ensaios realizados.

Quero agradecer aos meus pais e irmã pelo apoio, motivação e carinho que sempre me deram para ultrapassar todas as etapas da minha vida.

Um especial agradecimento à Mariana pela sua ajuda, compreensão, paciência e incentivo que me transmitiu em todos os momentos que precisei.

Aos meus amigos e colegas, que sempre me ajudaram e apoiaram.



# Resumo

As estruturas de Engenharia Civil, quando expostas a acções dinâmicas, podem ser sujeitas a vibrações que comprometem os níveis de segurança e conforto entre os seus utilizadores. Neste trabalho, é estudada a passagem pedonal que faz a ligação entre as Olaias e Chelas, em Lisboa.

É desenvolvido um estudo das forças verticais e laterais que os peões induzem na estrutura, por meio de um modelo determinístico proposto pela Sétra-Guidelines. Foi realizada uma análise das vibrações decorrentes na ponte pedonal, verificando-se que os limites em termos de acelerações eram excedidos.

De maneira a controlar os problemas de vibrações excessivas, são propostas duas soluções, nomeadamente um sistema de controlo passivo, utilizando amortecedores de massa sintonizada por forma a controlar as vibrações nas direcções vertical e lateral e um sistema de controlo activo, com o objectivo de gerar uma força de controlo adicionada a um TMD, de maneira a reduzir as vibrações decorrentes na direcção lateral.

O dimensionamento do sistema de controlo activo foi desenvolvido através do método de alocação de pólos, permitindo alterar directamente as características dinâmicas da estrutura. Por forma a estimar a resposta da estrutura quando dotada de um sistema de controlo activo, foi desenvolvido um programa em MATLAB e SIMULINK.

Por fim, foi analisada a resposta da estrutura com um sistema de controlo passivo, através do programa de elementos finitos Sap2000, evidenciando a eficiência das duas técnicas de controlo utilizadas. Desta forma, foi possível reduzir significativamente a resposta da estrutura quando sujeita a acções de multidões, verificando os limites impostos.

## Palavras chave:

- Pontes pedonais
- Carregamentos pedonais
- Amortecedor de massa sintonizada
- Amortecedor de massa activa



# Abstract

Civil engineering structures, when exposed to dynamic actions, may develop vibrations which compromise the safety and comfort levels of its users. This dissertation will study a footbridge connecting Olaias and Chelas, in Lisbon.

A study of the vertical and lateral forces induced by pedestrians on the structure is conducted, by means of a deterministic model proposed by Sétra-Guidelines. The footbridge vibrations were analyzed and it was found that the acceleration limits exceeded the regulated values.

To solve the vibration problems two solutions were proposed. A passive control system using tuned mass dampers was design to reduce the vertical and lateral vibrations as well as an active control system, capable of generating a control force applied to a TMD, in order to mitigate the lateral vibrations.

The design of the active control system was developed by the pole placement method, which allows the designer to directly modify the structures dynamic characteristics, in order to produce the control action needed. Simulations in Matlab and Simulink have been conducted to estimate the response of the footbridge with a passive-active control system.

The dynamic response of the footbridge is then analyzed using FEM software Sap2000, evaluating the effect of the passive and passive-active control systems. The proposed solutions can substantially reduce the response of the structure when subjected to crowd loadings, verifying the imposed limits.

## Keywords:

- Footbridges
- Pedestrian loads
- Tuned mass damper
- Active mass damper



# Índice de Matérias

<b>Copyright</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice de Tabelas</b>	<b>xvii</b>
<b>Lista de abreviaturas, siglas e símbolos</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 O problema das vibrações em pontes para peões . . . . .	1
1.2 Objectivos da dissertação . . . . .	2
1.3 Organização da dissertação . . . . .	2
1.4 Técnicas de controlo na redução dos níveis de vibração . . . . .	3
1.5 Aplicação de técnicas de controlo em pontes pedonais . . . . .	5
<b>2 Dinâmica de pontes pedonais</b>	<b>7</b>
2.1 Equação de movimento para uma solicitação harmónica . . . . .	7
2.2 Cargas pedonais . . . . .	9
2.2.1 Características da acção de um peão . . . . .	10
2.2.2 Modelação da acção pedonal . . . . .	13
2.3 Cargas devidas a grupos e multidões . . . . .	16
2.3.1 Sincronização vertical . . . . .	16
2.3.2 Sincronização horizontal . . . . .	16
2.3.3 Quantificação da carga devida a grupos e multidões . . . . .	18
2.4 Limites de aceleração . . . . .	22
2.4.1 EN1990 . . . . .	22
2.4.2 Norma BS 5400-Parte 2 . . . . .	23
2.4.3 Norma ONT 83 . . . . .	23
2.4.4 Sétra//AFGC Guidelines . . . . .	23

<b>3</b>	<b>Caso de estudo</b>	<b>25</b>
3.1	Modelação da Estrutura . . . . .	26
3.1.1	Características da estrutura . . . . .	26
3.1.2	Definição dos materiais . . . . .	27
3.1.3	Definição dos elementos estruturais . . . . .	27
3.1.4	Acções permanentes . . . . .	29
3.1.5	Modelo final . . . . .	30
3.2	Características dinâmicas . . . . .	31
3.2.1	Frequências próprias e modos de vibração . . . . .	31
3.2.2	Identificação de problemas de vibração excessiva . . . . .	35
3.2.3	Cálculo das acções dinâmicas . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Controlo de vibrações</b>	<b>43</b>
4.1	Amortecedor de massas sintonizadas . . . . .	43
4.1.1	Dimensionamento de TMD's . . . . .	44
4.1.2	Processo de dimensionamento . . . . .	48
4.2	Amortecedor de massas activas . . . . .	50
4.2.1	Dimensionamento do Controlador . . . . .	53
4.2.2	Observadores de Estado . . . . .	54
4.3	Modelação do sistema com aplicação de um AMD . . . . .	57
4.4	Representação em espaço de estados . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Implementação dos sistemas de controlo</b>	<b>59</b>
5.1	Controlo de vibrações com TMD's . . . . .	59
5.1.1	Aplicação de TMD's na direcção vertical . . . . .	59
5.1.2	Aplicação de TMD's na direcção lateral . . . . .	61
5.2	Controlo de vibrações com um AMD . . . . .	64
5.2.1	Representação do sistema em Espaço de Estados . . . . .	65
5.2.2	Dimensionamento do Controlador . . . . .	66
5.2.3	Dimensionamento do Observador de Estados . . . . .	71
5.2.4	Avaliação do comportamento da estrutura para os carregamentos pedonais . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Medições “in Situ”</b>	<b>81</b>
<b>7</b>	<b>Conclusão e Desenvolvimentos Futuros</b>	<b>87</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo das frequências naturais da estrutura</b>	<b>93</b>
<b>B</b>	<b>Função de Transferência</b>	<b>95</b>
<b>C</b>	<b>Equações do movimento em coordenadas modais</b>	<b>97</b>



<b>D</b>	<b>Aproximação dos modos de vibração da estrutura</b>	<b>101</b>
<b>E</b>	<b>Rotinas em Matlab</b>	<b>103</b>



# Índice de Figuras

1.1	Ponte Millenium [1] . . . . .	5
1.2	Ponte Pedro Inês [2] . . . . .	6
1.3	Estudo FEUP [3] . . . . .	6
2.1	Variação da função de carga com a frequência de movimento . . . . .	10
2.2	Função de carga para o movimento de andar nas três direcções [4] . . . . .	11
2.3	Relação entre o comprimento da passada e velocidade de movimento [5] . . . . .	12
2.4	Variação da frequência para a direcção vertical e lateral [6] . . . . .	13
2.5	Evolução da força na direcção vertical para uma pessoa a andar $f_v = 2$ Hz . . . . .	14
2.6	Evolução da força na direcção lateral para uma pessoa a andar $f_l = 1$ Hz . . . . .	15
2.7	Mecanismo lateral . . . . .	17
2.8	Factor minorativo $\psi$ . . . . .	21
2.9	Factor minorativo (Grau 3) $\psi$ . . . . .	21
2.10	Aplicação do carregamento induzido por multidões . . . . .	22
3.1	Vista da ponte da Bela Vista . . . . .	25
3.2	Alçado da estrutura . . . . .	26
3.3	Secção transversal (meio vão) . . . . .	26
3.4	Pavimento do passadiço . . . . .	28
3.5	Modelo final vista 3d . . . . .	30
3.6	Modelo final vista XZ . . . . .	30
3.7	Modelo final vista XY . . . . .	30
3.8	Graus de liberdade para verificação numérica . . . . .	32
3.9	Modos de vibração laterais, vista XY . . . . .	34
3.10	Modos de vibração verticais, vista XZ . . . . .	35
3.11	Pontos críticos vista XY . . . . .	35
3.12	Direcção da força unitária . . . . .	41
4.1	Modelo do funcionamento teórico de um TMD de massa $m_2$ . . . . .	44
4.2	Amplitude do movimento da massa principal para $\mu = 0.05$ e $q_e = 1$ adoptando diferentes valores de amortecimento do TMD . . . . .	45

4.3	Variação das frequências naturais do sistema em função de $\mu$ considerando $q_e = 1$ . . . . .	46
4.4	Resposta da estrutura controlada e não controlada . . . . .	48
4.5	Esquema do sistema de controlo em malha aberta . . . . .	51
4.6	Esquema do sistema de controlo em malha fechada . . . . .	52
4.7	Diagrama de blocos de um sistema de controlo com retroacção de estados . . . . .	53
4.8	Diagrama de blocos de um sistema de controlo com observador de estados . . . . .	55
4.9	Definição do modelo numérico com AMD num ponto genérico $x_o$ . . . . .	57
5.1	Pontos de aplicação de TMD's . . . . .	60
5.2	Aceleração vertical no ponto B com TMD sintonizado para o 1º modo vertical . . . . .	61
5.3	Acelerações máximas da estrutura para os diferentes carregamentos com TMD . . . . .	62
5.4	Solução final de controlo passivo por meio de TMD's . . . . .	64
5.5	Configuração dos primeiros 3 modos de vibração laterais . . . . .	65
5.6	Modelo em SIMULINK para dimensionamento do controlador . . . . .	67
5.7	Comparação entre deslocamentos do sistema não controlado e controlado (caso 1) . . . . .	68
5.8	Comparação entre deslocamentos do sistema não controlado e controlado (caso 2) . . . . .	70
5.9	Comparação entre deslocamentos do sistema não controlado e controlado (caso 3) . . . . .	71
5.10	Modelo geral em SIMULINK para dimensionamento do observador . . . . .	72
5.11	Modelo em SIMULINK para representação em espaço de estados . . . . .	72
5.12	Modelo em SIMULINK para dimensionamento do observador . . . . .	73
5.13	Comparação entre valores estimados e os estados simulados (1º caso) . . . . .	74
5.14	Comparação entre valores estimados e os estados simulados (2º caso) . . . . .	75
5.15	Modelo em SIMULINK com carregamentos pedonais . . . . .	77
5.16	Modelo em SIMULINK com carregamentos pedonais, representação em espaço de estados (Bloco 1) . . . . .	77
5.17	Modelo em SIMULINK com carregamentos pedonais, observador de estados (Bloco 2) . . . . .	77
5.18	Aceleração e força de controlo para o carregamento Modo 1, Classe I . . . . .	78
5.19	Aceleração e força de controlo para o carregamento Modo 2, Classe I . . . . .	78
5.20	Aceleração e força de controlo para o carregamento Modo 3, Classe I . . . . .	78
6.1	Execução dos ensaios dinâmicos . . . . .	82
6.2	Posição sensores . . . . .	83
6.3	Resultados das medições . . . . .	83

6.4	Identificação das frequências . . . . .	84
6.5	Coeficientes de amortecimento modais estimados através do método da meia potência . . . . .	85
A.1	Modelo analítico utilizado para o cálculo das frequências naturais na direcção vertical . . . . .	93
A.2	Funções de forma adoptadas para os graus de liberdade $U_1$ , $U_2$ , $U_3$ , $U_4$ e $U_5$ respectivamente . . . . .	94
D.1	Divisão da estrutura para efeitos de cálculo dos modos de vibração	101



# Índice de Tabelas

2.1	Valores médios do coeficiente de amortecimento crítico [7]	9
2.2	Frequência da passada medidas por diversos autores [5]	11
2.3	Frequência, velocidade e comprimento da passada médias [8]	12
2.4	Factores de carga dinâmicos propostos por diversos autores [5]	15
2.5	Número equivalente de peões de acordo com Sétra [7]	19
2.6	Graus das frequências na direcção vertical	20
2.7	Graus das frequências na direcção lateral	20
2.8	Resumo dos carregamentos a serem considerados	22
2.9	Acelerações máximas, EN1990	23
2.10	Acelerações verticais máximas, Sétra	24
2.11	Acelerações laterais máximas, Sétra	24
3.1	Características do material do passadiço	27
3.2	Características dos materiais dos pilares	27
3.3	Propriedades geométricas do passadiço	28
3.4	Propriedades geométricas dos apoios	29
3.5	Cargas permanentes da estrutura	29
3.6	Períodos e frequências dos primeiros 10 modos de vibração	32
3.7	Comparação entre modelo FEM e modelo analítico	33
3.8	Carregamento estático para as diferentes classes	36
3.9	Frequências e direcções dos primeiros 11 modos	36
3.10	Casos de carregamento	37
3.11	Número equivalente de peões para cada classe	38
3.12	Força por unidade de comprimento para o 1º modo	38
3.13	Força por unidade de comprimento para o 2º modo	39
3.14	Definição dos carregamentos pedonais	39
3.15	Acelerações máximas para cada caso	41
5.1	Parâmetros óptimos de um TMD sintonizado para o modo 5	60
5.2	Propriedades da estrutura para aplicação de TMD's nos 3 primeiros modos laterais	61
5.3	Propriedades dos diferentes TMD's sintonizados para os primeiros 3 modos de vibração	62
5.4	Massa modal e factores de participação de TMD's equivalentes	63

5.5	Parâmetros óptimos dos TMD's equivalentes . . . . .	63
5.6	Valores de pico para as respostas controlada e não controlada . . .	64
5.7	Propriedades do TMD . . . . .	65
5.8	Pólos do sistema em malha aberta e em malha fechada (1º caso) .	68
5.9	Pólos do sistema em malha aberta e em malha fechada (2º caso) .	69
5.10	Pólos do sistema em malha aberta e em malha fechada (3º caso) .	70
5.11	Valores máximos de aceleração para os 3 casos considerados . . .	79
6.1	Comparação das frequências naturais da estrutura na direcção vertical . . . . .	84
6.2	Resultados da análise dos dados do sensor 1 . . . . .	86
6.3	Resultados da análise dos dados do sensor 2 . . . . .	86
6.4	Resumo dos coeficientes de amortecimento . . . . .	86
D.1	Coeficientes da função polinomial . . . . .	102



# Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

## Abreviaturas

- AMD amortecedor de massa activo (*Active mass damper*)
- AVS sistemas activos variáveis (*Active variable systems*)
- FFT transformada de fourier (*Fast fourier transform*)
- HMD amortecedor de massa híbrido (*Hybrid mass damper*)
- LQR regulador linear quadrático (*Linear quadratic regulator*)
- PSD função de densidade espectral de potência (*Power spectrum density*)
- RSA regulamento de segurança e acções para estruturas de edifícios e pontes
- TLD amortecedor de líquido sintonizado (*Tuned liquid damper*)
- TMD amortecedor de massa sintonizado (*Tuned mass damper*)

## Siglas

- $A$  matriz de estado
- $a_{max}$  aceleração máxima
- $a_{adm}$  aceleração admissível
- $B$  matriz de entrada do sinal de controlo
- $B_{ex}$  matriz de entrada do sinal da acção pedonal
- $C$  matriz de saída
- $C_r$  matriz de controlabilidade
- $C_s$  matriz de amortecimento do sistema

$D$  matriz de transmissão directa do sinal de controlo

$D_{ex}$  matriz de transmissão directa do sinal da acção pedonal

$e(t)$  vector da estimativa do erro

$F_0$  amplitude do sinal da acção pedonal

$f(t)$  variação do sinal da acção pedonal

$G$  peso estático do peão

$I$  matriz de identidade

$K$  vector de ganho do controlador

$K_e$  matriz de ganho do observador

$K_s$  matriz de rigidez do sistema

$l_p$  comprimento da passada

$m_j$  massa generalizada do modo de vibração  $j$

$M_s$  matriz de massa do sistema

$N$  matriz de observabilidade

$q_j$  coordenada generalizada  $j$

$\dot{q}_j$  velocidade generalizada  $j$

$\ddot{q}_j$  aceleração generalizada  $j$

$t$  tempo

$u(t)$  vector de entrada do sinal de controlo

$v_p$  velocidade do movimento

$x(t)$  vector de estado

$x_0(t)$  vector de estado estimado pelo observador

$y(t)$  vector de saída

$y_0(t)$  vector de saída estimado pelo observador

**Símbolos**

- $f_p$  frequência da passada em Hz
- $\omega_j$  frequência natural do modo de vibração  $j$
- $\omega_{2,opt}$  frequência natural óptima
- $\xi_j$  coeficiente de amortecimento do modo de vibração  $j$
- $\xi_{,opt}$  coeficiente de amortecimento óptimo
- $\mu$  rácio de massas
- $\mu_{fp}$  média de frequências da passada
- $\sigma_{fp}$  desvio padrão de frequências da passada
- $\phi_j$  modo de vibração  $j$
- $\alpha_i$  factor de carga dinâmico da harmónica  $i$
- $\varphi_i$  ângulo de fase da harmónica  $i$
- $\beta_i$  factor de participação



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 O problema das vibrações em pontes para peões

O problema das vibrações em pontes pedonais é um tema que tem vindo a ganhar relevância no dimensionamento actual de estruturas. De facto, o constante avanço tecnológico na resistência dos materiais empregues em estruturas, tem levado a que as mesmas sejam cada vez mais esbeltas e, com isso, mais flexíveis, com grandes vãos e com uma reduzida massa o que as torna susceptíveis a acções dinâmicas. Como consequência da elevada flexibilidade as frequências naturais são reduzidas, potenciando o risco de ressonância perante uma acção pedonal.

Com efeito, devido à utilização deste tipo de estruturas por peões, as acções dinâmicas, consoante o tipo de movimento praticado, podem ser de diferentes tipos e mais ou menos sincronizadas com a estrutura, dependendo da frequência do movimento.

Assim, o fenómeno de ressonância tem maior relevo quando a estrutura é bastante flexível e com baixo amortecimento estrutural, como sucede em algumas pontes metálicas ou mistas, podendo então uma carga dinâmica produzir vibrações excessivas, motivadas pela proximidade entre a frequência da passada dos peões e as frequências naturais da estrutura.

De facto, devido à proximidade entre as duas frequências, a força induzida pelos peões, amplificada perante uma sincronização, pode originar níveis de vibração, responsáveis por causar desconforto ou medo nos seus ocupantes.

Relativamente à regulamentação em vigor para pontes pedonais, é imposto ao projectista a verificação de segurança aos estados limites últimos e de utilização. Em relação à primeira, são descritos os critérios a adoptar de maneira a verificar a segurança em relação à rotura (RSA, Eurocódigos). Por outro lado, a garantia de um comportamento adequado em serviço não é abordado especificamente. Desta forma, torna-se necessário a consulta de normas estrangeiras, a generalidade das quais estabelece um valor de referência em termos de acelerações, que quando ultrapassados podem causar uma sensação de desconforto.

## 1.2 Objectivos da dissertação

O objectivo deste trabalho, numa primeira fase, consiste em caracterizar a acção pedonal sobre as estruturas e analisar o efeito de uma multidão nestas, recorrendo assim às normas existentes que estabelecem limites máximos admissíveis em pontes pedonais.

Seguidamente, são estudadas duas técnicas de controlo: um sistema de controlo passivo e um sistema de controlo activo. Para a realização deste tipo de solução foram utilizados amortecedores de massas sintonizadas e os amortecedores de massa activa, por forma a evidenciar as vantagens e desvantagens da aplicação de cada um no controlo de vibrações.

Por último, pretende-se simular o comportamento da estrutura em estudo quando sujeita a um carregamento pedonal, evidenciando a resposta da estrutura com um sistema de controlo passivo e activo. Medições na estrutura em estudo foram realizadas, de maneira a identificar as características dinâmicas e validar o modelo numérico desenvolvido.

## 1.3 Organização da dissertação

O presente trabalho é composto por sete capítulos, apresentando-se no primeiro uma introdução aos aspectos gerais do problema de vibrações em pontes pedonais e descrevendo alguns tipos de sistemas de controlo.

No segundo capítulo são estudadas as acções dinâmicas induzidas por peões. Para isso, é caracterizada a acção decorrente do movimento de um peão, por meio de um modelo determinístico, e quantificada a acção de uma multidão de peões a atravessar a ponte, através de um número equivalente de peões. No fim do capítulo em questão, são sistematizados os níveis máximos de vibração, de forma a não causar desconforto entre os seus utilizadores.

No terceiro capítulo é avaliado o comportamento da estrutura em estudo quando solicitada por carregamentos pedonais, recorrendo para isso ao programa de cálculo Sap2000.

O quarto capítulo é referente aos sistemas de controlo analisados. Numa primeira fase é caracterizado um sistema passivo recorrendo a TMD's e desenvolvido o seu processo de dimensionamento. Seguidamente é efectuado o mesmo procedimento utilizando um sistema activo com um actuador adicionado a um TMD, caracterizando o método de desenvolvimento deste tipo de sistema. Por fim são deduzidas as expressões que caracterizam a estrutura dotada de um sistema de controlo e a respectiva representação em espaço de estados.

Seguidamente no quinto capítulo são implementadas duas soluções: uma de controlo passivo com recurso a TMD's e outra com controlo activo utilizando um TMD ao qual é adicionado um actuador, com o objectivo de reduzir os níveis de aceleração verificados.

O sexto capítulo trata da verificação do modelo analítico recorrendo a medições efectuadas no local. Para isso são estimadas as frequências naturais da estrutura e o seu amortecimento estrutural.

Finalmente no capítulo 7 são apresentadas as considerações finais, no que respeita aos temas desenvolvidos ao longo deste trabalho.

## 1.4 Técnicas de controlo na redução dos níveis de vibração

A redução dos níveis de vibrações pode ser efectuada através de um reforço da estrutura, aumentando assim a sua rigidez. Desta forma as frequências naturais podem ser alteradas para um intervalo não crítico, evitando fenómenos de ressonância. Por outro lado, a utilização de sistemas de controlo é uma alternativa que possibilita a rápida dissipação de energia associada ao movimento da estrutura.

As técnicas de controlo podem ser divididas em 4 classes: controlo passivo, controlo activo, controlo híbrido e controlo semi-activo.

### Controlo passivo

Um sistema de controlo passivo consiste em um ou mais dispositivos ligados à estrutura, dimensionados de maneira a alterar a rigidez ou o amortecimento estrutural, de tal forma que sem a utilização de uma fonte de energia externa é possível desenvolver forças de controlo que se opõem ao movimento da estrutura [9].

Um exemplo de um sistema de controlo passivo é o sistema de isolamento de base, em que o objectivo é apoiar a estrutura numa base suficientemente flexível, de maneira a dissipar a energia proveniente das acelerações do solo. Consequentemente, a redução da energia proveniente de um sismo e o aumento dos deslocamentos ao nível do isolamento é conseguido devido à flexibilidade do dispositivo de controlo [10].

A utilização de amortecedores viscosos, viscoelásticos, friccionais ou histéricos, correspondem a outro tipo de dispositivos passivos que permitem a dissipação de energia, quando colocados em locais devidamente seleccionados. Estes distinguem-se pelo modo de dissipação de energia.

Incluem-se, igualmente neste grupo, os amortecedores de massa sintonizada TMD's (*Tuned mass dampers*) e os amortecedores de liquido sintonizado TLD's (*Tuned liquid dampers*). Nestes, a resposta da estrutura é utilizada para produzir um movimento relativo entre o sistema de controlo e a mesma, de tal forma que a energia é dissipada. Este tipo de solução mostra-se eficiente na redução da resposta estrutural. No entanto, apenas é eficaz na frequência para a qual foi

dimensionada, pelo que em alguns casos pode ocorrer o fenómeno “*spill-over*”, onde a resposta pode ser amplificada nas restantes frequências da estrutura [11].

### Controlo activo

Um sistema de controlo activo é um sistema que actua com base em dados obtidos através de sensores e, por intermédio de um algoritmo pré-definido, é emitido um sinal ao actuador. Este por sua vez aplica a acção de controlo, necessitando sempre de uma fonte de energia exterior, de maneira a gerar as forças necessárias [12].

Dentro deste tipo de controlo inclui-se o amortecedor de massa activa AMD (*Active mass damper*), que é constituído por uma massa ligada à estrutura por meio de uma mola, de um amortecedor e de um actuador responsável pelo movimento da massa activa. Localizando este tipo de sistema num ponto onde os modos de vibração tenham uma componente modal significativa, é possível exercer uma acção de maneira a controlar os diferentes modos de vibração, sendo esta uma das vantagens em relação ao controlo passivo através da aplicação de TMD's.

Por outro lado, o custo e manutenção deste tipo de sistema aumenta quando comparado com um sistema passivo [10]. Este tipo de solução, perante uma falha de energia durante o decorrer de uma solicitação, não produzirá qualquer tipo de acção de controlo para atenuar as vibrações.

### Controlo híbrido

Um sistema de controlo híbrido pode ser definido como um sistema que combina um sistema passivo e um sistema activo. Desta forma é possível o uso do controlo activo de maneira a suplementar e melhorar o desempenho do controlo passivo, conseguindo uma solução fiável e eficiente no controlo de vibrações [9].

Um exemplo deste tipo de controlo consiste na alteração de um sistema de isolamento de base, através da aplicação de actuadores que actuam de maneira a reduzir os deslocamentos da estrutura.

A combinação de um TMD ou TLD com um controlo activo (HMD-*Hybrid mass damper*) é uma aplicação de um sistema híbrido, pelo que a redução da energia necessária para a acção de controlo é diminuída quando comparada com um sistema puramente activo [10].

A principal diferença entre um controlo híbrido e um controlo activo é a quantidade de energia necessária para operar.

### Controlo semi-activo

Este tipo de sistema é capaz de se adaptar às solicitações, modificando desta forma a rigidez ou o amortecimento de elementos localizados na estrutura, e assim produzir forças de grande amplitude com baixo consumo de energia [13].



Uma das principais vantagens deste tipo de solução é a fonte de energia necessária para a operação. Neste caso, esta é bastante inferior à de um sistema activo, podendo ser alimentado por uma bateria.

Dentro deste tipo de controlo incluem-se os dispositivos de rigidez variável, AVS (*Active variable systems*), amortecedores de atrito variável e amortecedores electorreológicos/magnetorreológicos.

Este tipo de controlo combina as melhores características do sistema activo e do sistema passivo, pelo que, é capaz de controlar em tempo real, os parâmetros da estrutura tais como, a rigidez ou o amortecimento [9].

## 1.5 Aplicação de técnicas de controlo em pontes pedonais

Um dos casos que despertou maior interesse devido às acções de multidões foi a Millenium Bridge sobre o rio Tamisa em Londres (figura 1.1). No dia da inauguração, 80 000 a 100 000 pessoas atravessaram a estrutura, resultando numa densidade de 1.3 a 1.5 pessoas por metro quadrado. As vibrações registadas, em termos de deslocamentos na direcção lateral, foram cerca de 70 mm no vão central, o que causou o seu encerramento após dois dias.



(a) Vista da ponte Millenium



(b) Aplicação do TMD

Figura 1.1: Ponte Millenium [1]

Para contornar este problema foi implementada uma solução com amortecedores viscosos e amortecedores de massa sintonizada, de maneira a controlar as vibrações excessivas na direcção lateral e vertical, respectivamente. Assim, foi possível reduzir os níveis de vibração da ponte permitindo a sua reabertura [14].

Em Portugal existem casos onde este tipo de solução foi implementada. A ponte Pedro Inês em Coimbra é um dos exemplos (figura 1.2). O número reduzido de peões que motivava a ocorrência do efeito “*Lock-in*”, efeito que corresponde à adaptação do movimento dos peões ao movimento da estrutura, levou a que

se tivesse de controlar o mesmo através da aplicação de TMD's na direcção lateral. A solução passou por implementar 6 TMD's na estrutura, de maneira a reduzir os níveis de vibração da mesma. Depois da instalação dos dispositivos de controlo foi realizada uma monitorização da resposta da estrutura desde a aplicação dos mesmos, e foi verificado que a resposta máxima da estrutura em termos de acelerações era de  $0.42 \text{ m/s}^2$  e  $0.074 \text{ m/s}^2$ , na direcção vertical e lateral respectivamente, o que é inferior aos limites de conforto regulamentados [2].

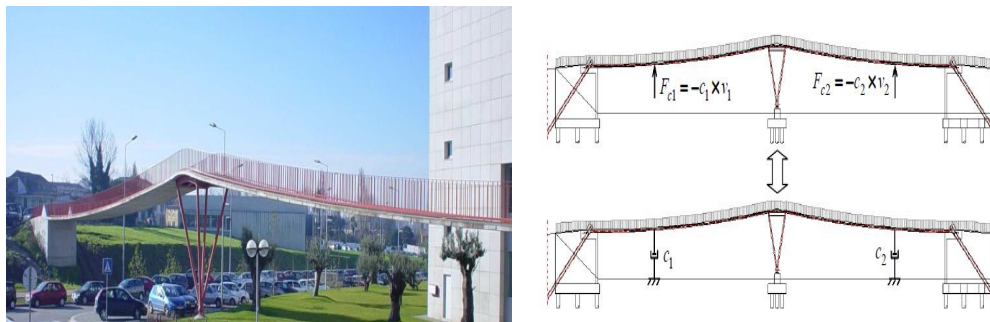


(a) Vista da ponte Pedro Inês

(b) aplicação do TMD

Figura 1.2: Ponte Pedro Inês [2]

A implementação de um sistema activo numa estrutura foi objecto de estudo de uma ponte pedonal localizada no campus da Faculdade de Engenharia do Porto (figura 1.3). A estratégia implementada passava por aumentar o coeficiente de amortecimento estrutural, utilizando dois AMD's e uma realimentação directa da velocidade.



(a) Vista da ponte, FEUP

(b) controlo utilizado

Figura 1.3: Estudo FEUP [3]

Neste caso, um sistema activo com apenas 34 Kg de massa, produziu o mesmo efeito que um dispositivo passivo recorrendo a um TMD com uma massa de 160 Kg. De facto, neste estudo, ao variar a posição do actuador, foi possível aumentar o coeficiente de amortecimento de 1.76 % para 4.15 % [3].

## Capítulo 2

# Dinâmica de pontes pedonais

Perante o estudo do comportamento dinâmico de uma ponte pedonal quando sujeita a um carregamento pedonal, a caracterização de todos os parâmetros intervenientes na modelação terão de ser avaliados. Assim, no presente capítulo, são apresentadas as propriedades dinâmicas de sistemas sujeitos a solicitações pedonais, definindo as equações de equilíbrio a serem estudadas.

Posteriormente será caracterizada a acção induzida por peões, avaliando todos os parâmetros intervenientes na acção e apresentando os respectivos critérios de segurança e de conforto humano, com o objectivo de limitar as vibrações decorrentes da acção pedonal.

### 2.1 Equação de movimento para uma solicitação harmónica

As cargas dinâmicas são aplicadas à estrutura como uma função do tempo, resultando em respostas variáveis em função deste. Para obter a resposta da estrutura é necessário efectuar uma análise dinâmica. Assim, recorrendo à equação do movimento de um sistema com  $n$  graus de liberdade define-se:

$$M_s \ddot{\mathbf{Z}}(t) + C_s \dot{\mathbf{Z}}(t) + K_s \mathbf{Z}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

onde  $M_s$ ,  $C_s$  e  $K_s$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura respectivamente, cada uma de ordem  $n$ . As grandezas  $\ddot{\mathbf{Z}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{Z}}(t)$ ,  $\mathbf{Z}(t)$  e  $\mathbf{F}(t)$  são os vectores de ordem  $n$  de aceleração, velocidade, deslocamento e força exterior.

Assumindo que o sistema é linear e com amortecimento proporcional, o sistema descrito pela equação 2.1 com  $n$  equações e  $n$  incógnitas, pode ser representado em termos de coordenadas modais em  $j$  equações desacopladas, cada uma com uma incógnita, pelo que:

$$\ddot{q}_j(t) + 2\zeta_j w_j \dot{q}_j(t) + w_j^2 q_j(t) = \frac{F(t)}{m_j} \Phi_j \quad (2.2)$$

onde  $m_j$ ,  $\zeta_j$  e  $w_j$  são a massa, coeficiente de amortecimento e a frequência natural do modo  $j$  respectivamente. As grandezas  $\ddot{q}_j$ ,  $\dot{q}_j$  e  $q_j$  correspondem à aceleração, velocidade e deslocamento modais respectivamente. Tal como será visto posteriormente, a força de excitação de um peão pode ser representada pelas séries de Fourier:

$$F_p(x, t) = G + \sum_{i=1}^N G\alpha_i \sin(2\pi i f_p t - \varphi_i) \quad (2.3)$$

onde  $G$  é o peso estático do peão,  $i$  é a harmónica em consideração,  $\alpha_i$  o factor de carga dinâmico da harmónica  $i$ ,  $\varphi_i$  o ângulo de fase,  $n$  o número de harmónicas consideradas e  $f_p$  a frequência da passada de um peão. Se o cálculo for efectuado para cada modo de vibração em separado, a resposta total do sistema pode ser obtida, tendo em conta a contribuição de  $n$  modos relevantes, através de:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \phi_j(x) \quad (2.4)$$

Resolvendo a equação 2.2, a amplitude da resposta dinâmica  $q_j(t)$  pode ser obtida multiplicando a resposta estática pelo factor de amplificação dinâmico, resultando na resposta estacionária:

$$q_j(t) = \sum_{i=1}^N q_{est}^i \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega_i^2)^2 + (2\zeta_j \Omega_i)^2}} \sin(2\pi f_p i t - \varphi_i) \quad (2.5)$$

onde  $\zeta_j$  é o coeficiente de amortecimento do modo  $j$ , e definindo  $\Omega_i$  como o rácio entre a frequência de excitação da harmónica  $i$  e a frequência natural do sistema:

$$\Omega_i = \frac{f_i}{f_j} \quad (2.6)$$

e definindo a resposta estática através de:

$$q_{est}^i = \frac{G\alpha_i \phi_j}{w_j^2 m_j} \quad (2.7)$$

a resposta da estrutura em termos de deslocamentos, resultará em:

$$u(x, t) = q_{est}^i \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega_i^2)^2 + (2\zeta_j \Omega_i)^2}} \sin(2\pi f_p i t - \varphi_i) \quad (2.8)$$

O factor de amplificação dinâmico depende da razão entre frequências ( $\Omega$ ) e do coeficiente de amortecimento do sistema. A amplitude de uma vibração forçada

pode manter-se pequena quer através da escolha de um elevado coeficiente de amortecimento, quer mantendo-se afastadas as frequências naturais do sistema e de excitação. Assim torna-se importante definir um correcto valor de amortecimento, definido como a capacidade de dissipação de energia da estrutura. Este depende de vários aspectos, tais como as ligações da estrutura e do carregamento, entre outros. É importante referir que apesar da massa e da rigidez de uma estrutura poderem ser modelados com alguma precisão, as propriedades de amortecimento são bastante mais difíceis de estimar. Geralmente são usados coeficientes de amortecimento entre 0.1 % e 2.0 %, pelo que, em termos de segurança, é importante não sobrestimar este coeficiente de maneira a não subdimensionar a estrutura [15].

Na tabela 2.1 são apresentados valores mínimos e médios para o coeficiente de amortecimento consoante o tipo de material da estrutura.

Tabela 2.1: Valores médios do coeficiente de amortecimento crítico [7]

Tipo de construção	Valor mínimo [%]	Valor médio [%]
Betão armado	0.80	1.30
Betão pré-esforçado	0.50	1.00
Aço	0.20	0.40
Construção mista	0.30	0.60
Madeira	1.50	3.00

## 2.2 Cargas pedonais

Na literatura podem ser encontrados diversos cenários possíveis de acções de peões em pontes pedonais, entre eles:

- Acção de um peão
- Acção de uma multidão
- Acção de um grupo de pessoas
- Acção premeditada

A acção de um peão compreende o movimento de andar, correr ou saltar. A acção de uma multidão de pessoas é condicionada pelo espaço livre entre cada indivíduo. Se estiver presente um elevado número de pessoas na ponte, cada indivíduo irá alterar o seu movimento consoante o espaço livre disponível. Por outro lado, se estiver presente um número reduzido de pessoas, a situação anterior não terá lugar, ou seja, cada indivíduo irá deslocar-se livremente sem ter que evitar contacto com os restantes peões. A acção de um grupo de

peças é caracterizada por um número inferior de peões a caminhar em conjunto ao longo do comprimento da ponte. Por fim, a acção premeditada descreve uma pessoa ou um grupo de pessoas, que intencionalmente tentam excitar a estrutura, movimentando-se sincronizadas com a mesma, ou seja, tentam coincidir a frequência do seu movimento com a frequência da estrutura [1],[16].

No âmbito deste trabalho será abordada a acção de uma multidão de pessoas ao longo da ponte. Para isso será caracterizada em primeiro lugar a acção de um peão, e posteriormente a acção de uma multidão de pessoas.

### 2.2.1 Características da acção de um peão

As cargas induzidas por peões podem ser descritas como funções de carga que relacionam a evolução da força ao longo do tempo. Assim, a função de carga, característica do movimento do peão, é uma força dinâmica temporal, com componentes nas três direcções: lateral, longitudinal e vertical, sendo que as direcções vertical e lateral são aquelas a que se tem dado maior importância. No estudo realizado por Wheeler [17], sobre as forças induzidas por peões relevantes para a excitação dinâmica em pontes pedonais, é diferenciado o movimento humano em categorias, desde um movimento lento até à corrida, com o objectivo de estudar a influência de cada uma na quantificação da força pedonal. Na figura 2.1 é apresentada a evolução da força na direcção vertical ao longo do tempo para as diversas actividades. É ainda observada a evolução da força de um peão em cada passo.

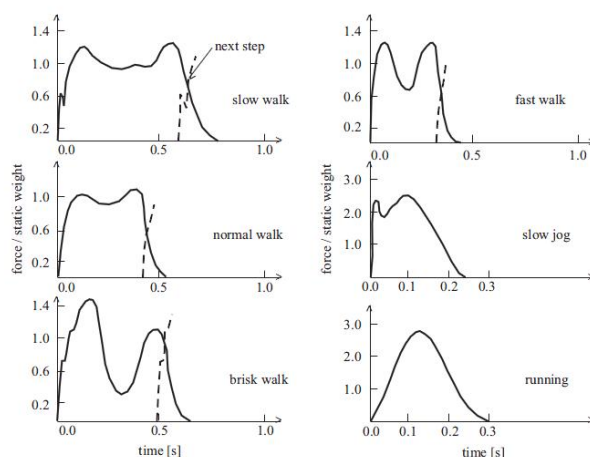


Figura 2.1: Variação da função de carga com a frequência de movimento [8]

Observa-se que, para o movimento de andar lento, existem dois picos na função de carga. O primeiro corresponde ao momento em que o peão toca no solo com o calcanhar e o segundo quando a biqueira do pé entra em contacto com o chão. À medida que a velocidade do movimento aumenta, estes dois máximos

têm tendência a aproximar-se até ao ponto em que são coincidentes, situação correspondente ao movimento de correr.

Pressupondo que ambos os pés produzem exactamente a mesma força, uma sequência de passos será a sobreposição de um passo. Assim, na figura 2.2 apresenta-se o movimento de andar para cada uma das direcções. No decorrer do caminhar de um peão, existe sempre um contacto de um dos pés com o pavimento, e na transição de um pé para o outro existe um momento em que ambos contactam o solo, pelo que ocorrerá uma sobreposição da função do pé esquerdo e direito.

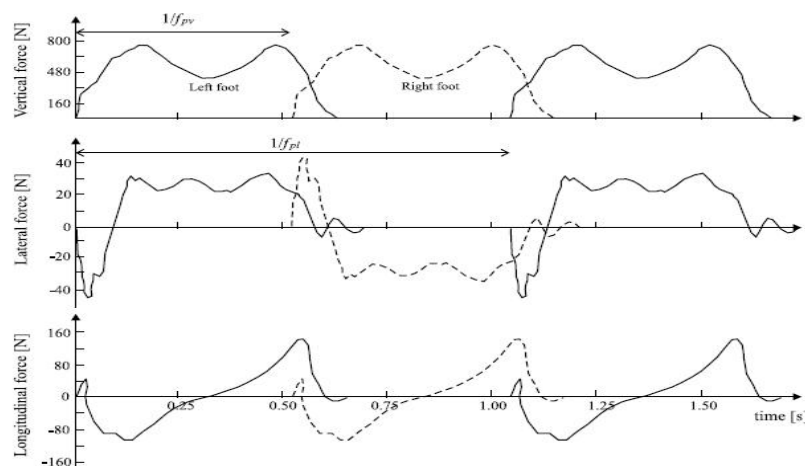


Figura 2.2: Função de carga para o movimento de andar nas três direcções [4]

Existem diversos factores como a densidade, a demografia, idade e sexo, que fazem variar a frequência da passada  $f_p$ , que é definida como o número de passos dados por um peão por unidade de tempo. Na literatura são encontrados vários estudos com o objectivo de quantificar este parâmetro. No estudo de Matsumoto *et al.* [18], onde se mediu a frequência do movimento de uma amostra de 505 peões, conclui-se que este parâmetro pode ser descrito estatisticamente, assumindo uma distribuição normal, com uma média de 2.0 Hz e um desvio padrão de 0.173 Hz. Na tabela 2.2 é sistematizada uma síntese dos vários estudos realizados por diferentes autores, onde é apresentado o respectivo número das amostras  $N$ , a média da frequência da passada  $\mu_{f_p}$  e o respectivo desvio padrão  $\sigma_{f_p}$ .

Tabela 2.2: Frequência da passada medidas por diversos autores [5]

Autor	$N$	$\mu_{f_p}$ [Hz]	$\sigma_{f_p}$ [Hz]
Matsumoto et al.	505	2.0	0.173
Zivanovic et al.	1976	1.87	0.186
Ricciardelli et al.	116	1.835	0.172
Kerr and Bishop	40	1.9	—

Um segundo factor importante para a caracterização do movimento do peão é a velocidade do movimento  $v_p$ . Este parâmetro varia consoante o tipo de movimento. Na tabela 2.3 é apresentado, para cada tipo de movimento, a velocidade média obtida por Wheeler [17].

O produto da frequência do movimento com o comprimento da passada,  $l_p$ , resulta na velocidade do movimento. Assim, é introduzido um novo parâmetro, o comprimento da passada. Este é obtido através da relação definida na expressão 2.9 e para cada tipo de movimento são apresentados, na tabela 2.3, os valores médios do mesmo.

$$l_p = \frac{v_p}{f_p} \quad (2.9)$$

Tabela 2.3: Frequência, velocidade e comprimento da passada médias [8]

Movimento	$f_p$ [Hz]	$v_p$ [m/s]	$l_p$ [m]
andamento lento	$\sim 1.7$	$\sim 1.1$	$\sim 0.65$
andamento normal	$\sim 2.0$	$\sim 1.5$	$\sim 0.75$
andamento rápido	$\sim 2.3$	$\sim 2.2$	$\sim 0.96$
corrida lenta	$\sim 2.5$	$\sim 3.3$	$\sim 1,32$
corrida rápida	$> 3.2$	$> 5.5$	$> 1.72$

Wheeler deduziu este parâmetro obtendo uma relação polinomial, representada na figura 2.3, entre o referido comprimento da passada, a velocidade do movimento e a frequência. Desta relação pode concluir-se que para o mesmo valor de velocidade do movimento podem existir diferentes comprimentos de passada. Por outro lado, o aumento da frequência implica um aumento da velocidade do movimento, o que por sua vez faz aumentar o comprimento da passada.

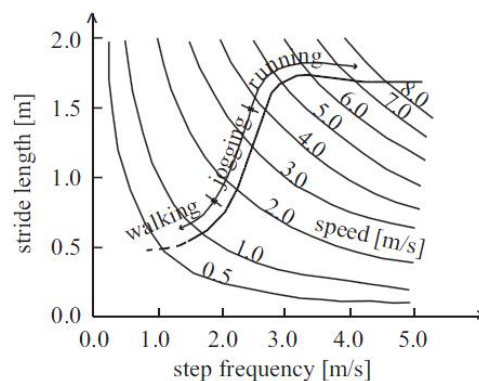


Figura 2.3: Relação entre o comprimento da passada e velocidade de movimento [5]



### 2.2.2 Modelação da acção pedonal

Para obter a resposta do sistema quando este é solicitado por uma acção pedonal, é necessário caracterizar a função de carga analiticamente. Na literatura são propostos modelos aplicados no domínio do tempo e no domínio da frequência. Modelos no domínio do tempo descrevem a acção do peão como uma força periódica, enquanto que modelos no domínio da frequência assumem que as cargas são processos aleatórios e que as forças do andar são representadas através de um espectro de resposta [19].

No domínio do tempo existem dois tipos de modelos: um determinístico, em que se estabelece um modelo geral da força para cada tipo de actividade, e um probabilístico, que tem em conta o facto de todos os parâmetros que influenciam a força dinâmica, como a frequência e o peso da pessoa, serem variáveis e por isso devem ser descritos em termos probabilísticos.

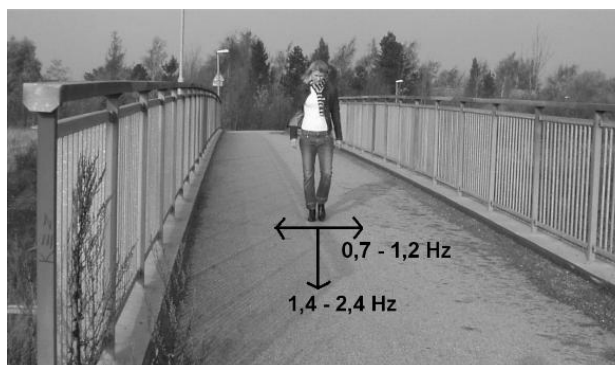


Figura 2.4: Variação da frequência para a direcção vertical e lateral [6]

Neste trabalho apenas será abordado o modelo determinístico, que se baseia no pressuposto de que ambos os pés produzem exactamente a mesma força e que a mesma é periódica [5].

A função de carga, característica do movimento do peão, é uma força dinâmica temporal que traduz a força exercida pelo peão ao longo do tempo. Durante o andar, forças dinâmicas são exercidas em cada passo dado com componentes nas três direcções: lateral, longitudinal e vertical. A cada tipo de movimento (andar, correr, saltar) corresponde uma função de carga diferente. Resultados experimentais indicam que as funções de carga dadas pela mesma pessoa não variam consoante o pé esquerdo ou direito [20]. Assim, uma vez quantificado o efeito de um passo, a sequência de passos será então a sobreposição de vários passos.

Em 1977, Blanchard *et al.* [21] desenvolveu um modelo determinístico baseado no efeito de ressonância, considerando apenas a contribuição da primeira harmónica. Assim, o modelo proposto consiste no primeiro termo das séries de Fourier, e a força vertical induzida por um peão numa ponte pedonal pode ser representada

no domínio do tempo como sinusoidal:

$$F_p(x, t) = G\alpha \sin(2\pi f_p t) \delta(x - 0.9 f_p t) \quad (2.10)$$

onde:

$G$ : Peso de um peão

$\alpha$ : Factor de carga dinâmico

$f_p$ : Frequência do movimento

$\delta(x - 0.9 f_p t)$ : Operador de Dirac centrado em  $x = 0.9 f_p t$

Na expressão anterior é assumido que o peão se movimenta com velocidade constante ao longo do comprimento da ponte e com o valor de  $v_p = 0.9 f_p t$ . Para este modelo, Blanchard propôs um valor de 0.257 para o factor de carga dinâmico.

Posteriormente constatou-se que o factor de carga dinâmico depende de vários parâmetros, como a frequência do movimento e o tipo de actividade do peão, e que a função de carga poderia ser modelada adicionando harmónicas superiores. Assim, tendo em conta que a excitação  $F_p(x, t)$  é periódica durante um intervalo  $T$ , esta pode ser representada recorrendo às series de Fourier, definidas por:

$$F_p(t) = G + \sum_{i=1}^N G\alpha_i \sin(2\pi i f_p t - \varphi_i) \quad (2.11)$$

Com base na decomposição de Fourier muitos investigadores têm procurado quantificar o coeficiente de Fourier ou o factor de carga dinâmico, que é a base para os modelos de carga. Os resultados destas medições são apresentados na tabela 2.4.

A evolução da força de um peão ao longo do tempo na direcção vertical e lateral encontra-se representada nas figuras 2.5 e 2.6, respectivamente, e pode ser observado o efeito da consideração das harmónicas superiores.

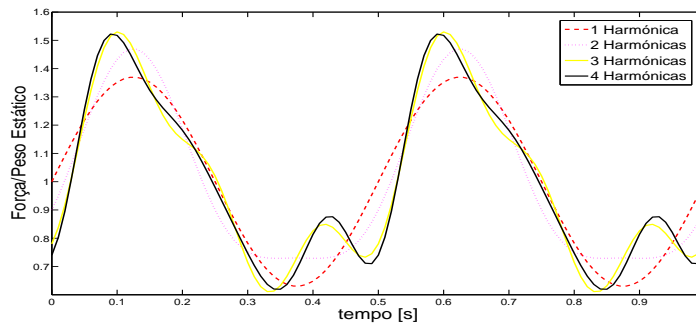


Figura 2.5: Evolução da força na direcção vertical para uma pessoa a andar  $f_v = 2$  Hz

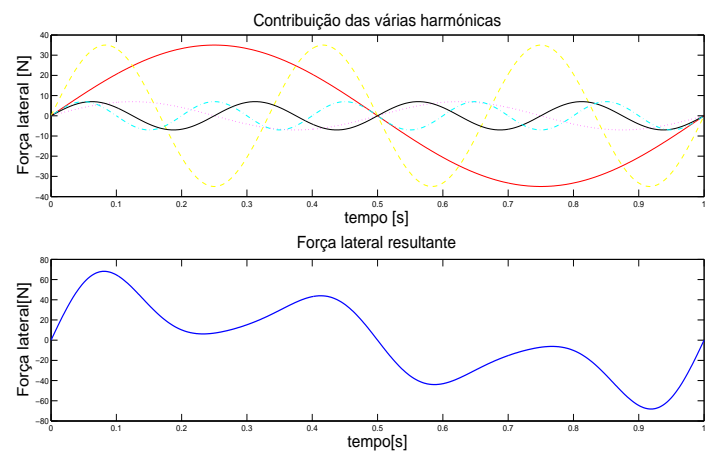


Figura 2.6: Evolução da força na direcção lateral para uma pessoa a andar  $f_l = 1$  Hz

Tabela 2.4: Factores de carga dinâmicos propostos por diversos autores [5]			
Autor	Factores de carga dinâmicos	Comentários	Tipo de actividade e direcção
Blanchard et al.	$\alpha_1 = 0.257$	Factor é reduzido para frequências entre 4 a 5 Hz	Andar-direcção vertical
Bachmann e Ammann	$\alpha_1 = 0.4 - 0.5$	Entre 2 e 2.4 Hz	Andar-direcção vertical
Schulze	$\alpha_2 = \alpha_3 = 0.1$		
	$\alpha_1 = 0.37, \alpha_2 = 0.10, \alpha_3 = 0.12$	Em 2 Hz	Andar-direcção vertical
	$\alpha_4 = 0.04, \alpha_5 = 0.015$		
	$\alpha_1 = 0.039, \alpha_2 = 0.012, \alpha_3 = 0.043$	Em 2 Hz	Andar-direcção lateral
Schulze	$\alpha_4 = 0.012, \alpha_5 = 0.015$		
	$\alpha_{1/2} = 0.037, \alpha_1 = 0.204$	Em 2 Hz	Andar-direcção Longitudinal
	$\alpha_{3/2} = 0.026, \alpha_2 = 0.083$		
	$\alpha_{5/2} = 0.024$		
Bachmann et al.	$\alpha_1 = 0.4 - 0.5, \alpha_2 = \alpha_3 = 0.1$	Em 2.0/2.4 Hz	Andar-direcção vertical
	$\alpha_1 = \alpha_3 = 0.1$	Em 2.0 Hz	Andar-direcção Lateral
	$\alpha_{1/2} = 0.1, \alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.1$	Em 2.0 Hz	Andar-direcção Longitudinal
Young	$\alpha_1 = 0.37(f - 0.95) \leq 0.5$	Valores médios	Andar-direcção vertical
	$\alpha_2 = 0.054 + 0.0044f$		
	$\alpha_3 = 0.026 + 0.0050f$		
	$\alpha_4 = 0.010 + 0.0051f$		

Tendo em conta que a direcção longitudinal corresponde à direcção da maior rigidez, a solicitação segundo esta direcção não será estudada.

Ao contrário da direcção vertical, na direcção lateral as forças induzidas por um peão não têm sempre o mesmo sentido de aplicação, pelo que em cada

passo dado serão produzidas forças com sinais contrários. Devido a este facto, a frequência na direcção lateral será metade da considerada na direcção vertical.

## 2.3 Cargas devidas a grupos e multidões

Uma vez descritas as forças induzidas por um peão, interessa quantificar as cargas induzidas por um grupo de pessoas e por uma multidão de pessoas. Na prática, as pontes pedonais estão submetidas a acções simultâneas de várias pessoas, o que as torna de difícil quantificação. O número de peões presentes na estrutura influencia as cargas que são produzidas, e estas podem ser mais ou menos sincronizadas entre os peões e possivelmente com a estrutura.

Assim, definem-se dois tipos de sincronização: uma entre peões e outra entre os peões e a estrutura. Entende-se como sincronização estrutura-peão a adaptação do movimento do peão à estrutura [6].

### 2.3.1 Sincronização vertical

Quando um peão se movimenta sobre uma ponte pedonal, este é mais tolerante em relação a vibrações verticais do que a vibrações laterais. Aliás, é sugerido que para um peão sentir desconforto, durante o movimento na estrutura em causa, é necessário que o deslocamento vertical seja pelo menos de 10 mm [5]. É importante referir que uma sincronização na direcção vertical pode acontecer, mas a incapacidade de um peão adaptar o seu movimento a uma estrutura oscilatória nesta direcção causa a diminuição da vibração, ou seja, é como se um peão adicionasse um certo amortecimento na estrutura.

### 2.3.2 Sincronização horizontal

Quando um peão atravessa uma ponte pedonal ele caminha numa superfície oscilatória, pelo que, se as vibrações forem perceptíveis, uma interacção estrutura-peão pode ocorrer.

Os peões são menos tolerantes a movimentos laterais do pavimento e, por isso, é mais provável que ocorra uma sincronização lateral com o mesmo. Assim, este fenómeno tem duas consequências. Devido à presença de peões e devido ao seu peso, as propriedades dinâmicas da ponte são alteradas, pelo que o primeiro efeito será a modificação das frequências naturais da estrutura. Tal ocorre por adição de massa na mesma, podendo alterar significativamente as suas propriedades quando as pontes são muito leves. O segundo efeito será a alteração do amortecimento da estrutura, em especial quando ocorre uma interacção entre a estrutura e o peão, provocando a diminuição do mesmo. Este fenómeno denomina-se de excitação lateral sincronizada (SLE), e tem vindo a ganhar maior importância desde o caso da ponte Millennium [22].

Este fenómeno pode ocorrer devido a dois tipos de sincronização. Durante o movimento do peão o centro de gravidade deste não varia apenas verticalmente mas também lateralmente. Assim, durante a vibração lateral da ponte ele vai tentar compensar o movimento adicional do seu centro de gravidade, movimentando-se com o deslocamento da ponte, de modo a obter uma estabilidade lateral.

Este comportamento é intuitivo e a variação do seu centro de gravidade é acompanhada de uma adaptação da sua frequência da passada. A este tipo de sincronização entre o peão e a estrutura denomina-se efeito *lock-in*. Assim, se o movimento do corpo tiver a mesma frequência que a da estrutura e se estiver em fase com a velocidade lateral do pavimento, o trabalho produzido será sempre positivo, ou seja, o peão introduz uma energia positiva no sistema provocando um aumento da vibração (figura 2.7)[4]. Como consequência do desconforto criado devido a este efeito, os peões caminham com as suas pernas mais afastadas, e portanto o deslocamento do seu centro de gravidade aumenta, tal como a força produzida por este.

O segundo tipo de sincronização pode ocorrer entre os peões e depende da densidade da multidão em questão. Quando a densidade é muito elevada, cada peão será forçado a adaptar o seu movimento com o das pessoas que o rodeiam. Os dois tipos de sincronização estão relacionados, não podendo ser estudados em separado. Este fenómeno é amplificado se o peão caminhar numa multidão, pois a sincronização entre peões pode aumentar o efeito da interacção estrutura-peão. À medida que a amplitude das forças aumenta, a força dinâmica lateral também aumenta, tal como o nível de sincronização entre peões [4].

É importante referir que este fenómeno nunca levou a que uma estrutura colapsasse, uma vez que este efeito tem um limite imposto, isto é, quando a vibração excede um certo limite os peões param o seu movimento, o que leva a que a vibração decaia. Este efeito não está relacionado com nenhuma estrutura em particular, mas pode ocorrer em pontes pedonais que exibam uma frequência na direcção lateral inferior a 1.3 Hz e que tenham um número suficiente de pessoas para o desencadear [23].

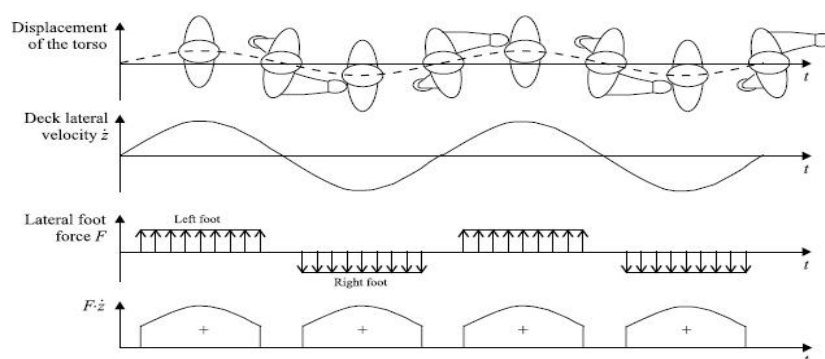


Figura 2.7: Mecanismo lateral [4]

### 2.3.3 Quantificação da carga devida a grupos e multidões

A primeira tentativa de modelar a carga devida a multidões, resultou no produto da carga induzida por um peão,  $F_p(t)$ , pelo número de peões presentes. Este princípio foi desenvolvido por Matsumoto [18], em que, considerando um número de peões que entram na ponte por unidade de tempo,  $\lambda$  (peões/segundo), a acção dinâmica da multidão pode ser determinada multiplicando o efeito de um peão por um factor  $m$ , definido por:

$$m = \sqrt{\lambda T} \quad (2.12)$$

Na equação anterior,  $T$  corresponde ao tempo necessário para um peão atravessar a ponte e este é representado por  $T = L/v$ , onde  $L$  representa o comprimento da ponte e  $v$  a velocidade do peão. É então perceptível que o produto  $\lambda T$  corresponda ao número de pessoas  $n$  que estão presentes na ponte num determinado momento. Desta forma,  $n$  peões presentes na ponte é equivalente a  $\sqrt{n}$  peões todos eles sincronizados. Assim, este factor dividido pelo número de pessoas pode ser interpretado como um factor de sincronização, ou seja, o número de pessoas que no meio de uma multidão caminham com a mesma frequência, desprezando-se o resto da população.

É conveniente dizer que uma pessoa no meio de uma multidão, devido ao espaço limitado que a rodeia e à possibilidade de conseguir ver as outras pessoas, inconscientemente vai sincronizar o seu movimento com o das outras, sendo que este fenómeno se torna mais evidente à medida que a multidão aumenta.

Uma análise das vibrações laterais utilizando esta abordagem foi conduzida na 'T-footbridge' em Tokyo, com o objectivo de estimar a resposta dinâmica. Desse estudo conclui-se que esta abordagem subestimava a resposta da estrutura. Isto deve-se ao facto de o peão adaptar o seu movimento à vibração lateral do pavimento e ao facto de neste modelo não ser contabilizado o efeito de interacção peão-estrutura. Neste estudo, em vez do referido factor de Matsumoto descrito pela equação 2.12, deveria ser considerado um factor quase nove vezes superior para prever a vibração induzida pelos peões [24].

A hipótese do efeito de uma multidão ser obtido através da multiplicação da acção de um peão por um factor, é também a base da French Sétra Guideline [7]. Assim, na mesma, é definido um número equivalente de peões, que, igualmente distribuídos ao longo do comprimento da ponte, e caminhando com a mesma frequência da estrutura, causam o mesmo efeito que uma multidão aleatória. O número equivalente de pessoas é derivado empiricamente através de simulações de Monte Carlo, calculando a resposta de pontes com diferentes comprimentos e propriedades dinâmicas, atravessadas por diferentes multidões de peões com diferentes densidades.

Esta aproximação distingue quatro classes baseadas no nível de tráfego da ponte:

- Classe I: Meio urbano fazendo ligação entre elevadas zonas populacionais ou multidões a atravessar a estrutura frequentemente;
- Classe II: Meio urbano fazendo ligação entre zonas populacionais, com grande tráfego de peões a atravessar a estrutura ocasionalmente na área total do pavimento;
- Classe III: Uso normal da estrutura, com grupos de peões a atravessar a mesma ocasionalmente, mas nunca na área total do pavimento;
- Classe IV: Fraca utilização, localizada em meio rural, ligando populações dispersas ou fornecendo ligação pedonal sobre uma auto-estrada ou caminho de ferro.

Tendo em conta a classe de tráfego da ponte, é possível definir os diferentes carregamentos a serem considerados. Desta forma, na tabela 2.5 são apresentadas as duas expressões a serem consideradas por forma a calcular o número equivalente de peões e os diferentes carregamentos a serem considerados, bastando para tal definir o número de peões presentes na estrutura  $N$ , e o respectivo amortecimento  $\xi$ .

Para o caso da classe I foi assumido que todos os peões caminham com a mesma frequência e com fases aleatórias, enquanto que para os casos das classes II e III, além de ângulos de fase aleatórios, são também assumidas as frequências como aleatórias. Assim, a possibilidade de sincronização entre peões é considerada quando a densidade é muito elevada.

No caso de fluxos densos, o movimento dos peões torna-se mais lento devido ao pouco espaço disponível entre eles, tendo como consequência o aumento da sua sincronização. A partir de certo ponto o movimento torna-se praticamente impossível, reduzindo significativamente os efeitos dinâmicos.

Tabela 2.5: Número equivalente de peões de acordo com Sétra [7]

	Graus das frequências naturais			
	Grau 1	Grau 2	Grau 3	Grau 4
Classe IV	sem cálculo	sem cálculo	sem cálculo	sem cálculo
Classe III	$10.8\sqrt{N\xi}$	sem cálculo	sem cálculo	sem cálculo
Classe II	$10.8\sqrt{N\xi}$	$10.8\sqrt{N\xi}$	$10.8\sqrt{N\xi}$	sem cálculo
Classe I	$1.85\sqrt{N}$	$1.85\sqrt{N}$	$1.85\sqrt{N}$	sem cálculo

A atribuição de graus às frequências naturais da estrutura permite estimar o risco de ressonância devido às acções pedonais, e definir as acções dinâmicas a ter em conta. Desta forma, as frequências naturais da estrutura são classificadas em 4 graus para cada direcção (tabelas 2.6 e 2.7), sendo que o grau 1 corresponde ao

máximo risco de ressonância e o grau 4 ao mínimo risco. Com esta classificação é possível definir os diferentes carregamentos a serem considerados, consoante a classe desejada para a ponte e o respectivo risco de ressonância.

Tabela 2.6: Graus das frequências na direcção vertical

Frequência [Hz]	0	1	1.7	2.1	2.6	5
Grau 1						
Grau 2						
Grau 3						
Grau 4						

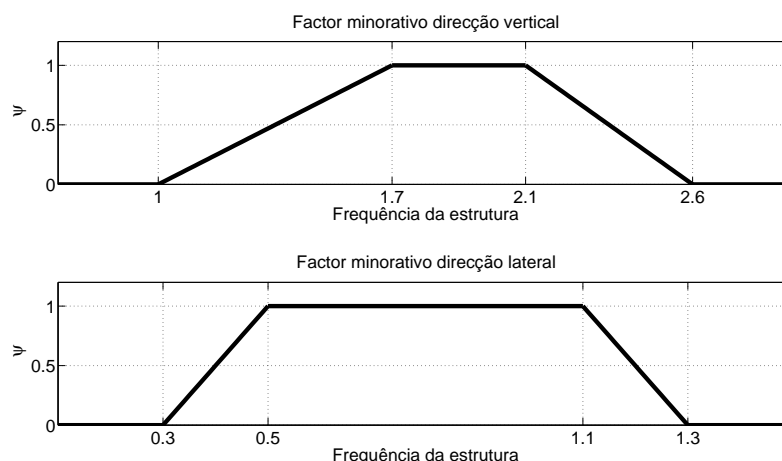
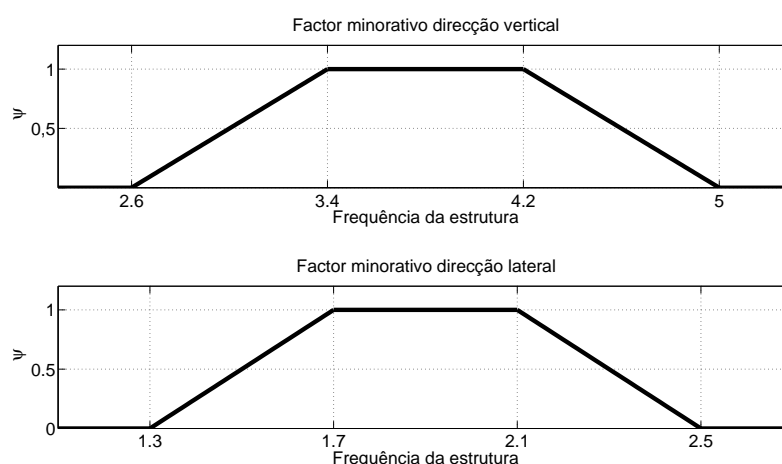
Tabela 2.7: Graus das frequências na direcção lateral

Frequência [Hz]	0	0.3	0.5	1.1	1.3	2.5
Grau 1						
Grau 2						
Grau 3						
Grau 4						

Dependendo das frequências naturais da estrutura e da sua classe, pode ser calculado um número equivalente de peões e, tendo em conta o grau de frequência em risco, podem ser definidos os diferentes carregamentos. Desta forma, para cada grau de frequência, são definidos os diferentes carregamentos a considerar consoante a classe de tráfego desejada. Assim, são definidas 3 situações de cálculo: frequências classificadas de grau 1, que têm em consideração apenas o efeito da 1ª harmónica e a verificação deverá ser feita para as 3 classes de tráfego, frequências classificadas de grau 2, onde a verificação é feita apenas para as duas primeiras classes de tráfego, e por fim, as frequências classificadas de grau 3, que apenas poderão ser solicitadas pela 2ª harmónica, e assim têm uma menor probabilidade de ocorrer, devendo ser verificadas as classes I e II.

O número equivalente de peões, definido na tabela 2.5, é modificado por um factor minorativo  $\psi$ , que tem em conta o risco de ressonância. Este fenómeno de ressonância tem uma menor probabilidade de ocorrer quanto mais longe estiver das frequências classificadas de grau 1. O factor  $\psi$  toma o valor unitário quando a frequência na direcção vertical se encontra entre 1.7 – 2.1 Hz, e na direcção lateral entre 0.5 – 1.1 Hz, para o caso dos carregamentos classificados como de grau 1 ou 2 (figura 2.8). No caso dos carregamentos classificados como de grau 3, situação correspondente ao efeito da 2ª harmónica, o factor minorativo toma o valor unitário quando a frequência se encontra entre 3.4 – 4.2 Hz na direcção vertical, e entre 1.7 – 2.4 Hz na direcção lateral (figura 2.9).



Figura 2.8: Factor minorativo  $\psi$  (Grau 1 e 2)Figura 2.9: Factor minorativo  $\psi$  (Grau 3)

Na tabela 2.8 é apresentada uma síntese dos diferentes carregamentos a ter em conta para cada direcção de movimento. Dado o elevado número de parâmetros que interferem na quantificação das acções pedonais, é adoptado um valor médio em relação aos mesmos, definindo o valor de 700 N para o peso estático de um peão. Relativamente aos coeficientes de carga dinâmicas  $\alpha_i$ , é adoptado os valores de 0.4 e 0.05 para as direcções vertical e lateral respectivamente, no caso de carregamentos aplicados em ressonância com frequências classificadas de grau 1 ou 2. Para frequências classificadas de grau 3, frequências solicitadas pela 2ª harmónica, são adoptados os coeficientes de 0.1 e 0.01 para as direcções

vertical e lateral respectivamente.

Tabela 2.8: Resumo dos carregamentos a serem considerados

Força induzida	Carregamentos	Direcção	Força por unidade de comprimento
$G \cdot \alpha_i \cdot N_{eq} \psi / L \cdot \sin(2\pi f_v t)$	Grau 1 e 2	Vertical	$280 \cdot N_{eq} \psi / L \cdot \sin(2\pi f_v t)$
		Lateral	$35 \cdot N_{eq} \psi / L \cdot \sin(2\pi f_l t)$
	Grau 3	Vertical	$70 \cdot N_{eq} \psi / L \cdot \sin(2\pi f_v t)$
		Lateral	$7 \cdot N_{eq} \psi / L \cdot \sin(2\pi f_l t)$

Ao contrário de outras aproximações, este número deverá ser considerado uniformemente distribuído ao longo do comprimento  $L$  da ponte e a aplicação da força deverá ter a mesma direcção que o modo de vibração [22], conforme a figura 2.10. Desta forma é possível ter em conta a sincronização da estrutura com os peões e a sincronização entre os mesmos.

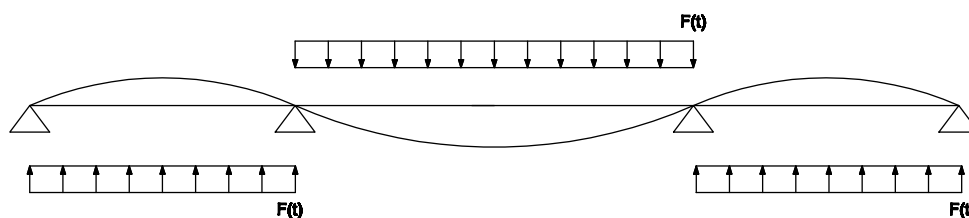


Figura 2.10: Aplicação do carregamento induzido por multidões

## 2.4 Limites de aceleração

Os projectos de pontes pedonais, nos últimos anos, têm sido cada vez mais ousados, com estruturas leves, grandes vãos, com pouca rigidez e baixo peso. Estes factores tornam as pontes pedonais susceptíveis a vibrações excessivas, motivadas pela possibilidade de fenómenos de ressonância devido à passagem de peões. Assim, torna-se importante estabelecer limites de acelerações ou deslocamentos máximos que tenham em conta o conforto dos peões. Neste tópico serão abordados os critérios normativos para os limites de acelerações em pontes pedonais.

### 2.4.1 EN1990

Nesta norma o conforto de peões deve ser satisfeito em termos de acelerações em qualquer parte da estrutura. Os valores recomendados são dados pela tabela 2.9 [25].

Tabela 2.9: Acelerações máximas, EN1990

Direcção	Aceleração máxima [m/s <sup>2</sup> ]
Vibração vertical	0.7
Vibração horizontal	0.2
Vibração horizontal, condições de multidões	0.4

O Eurocódigo 5 [26] também contém informações relativas a pontes pedonais de madeira. Os limites de aceleração são iguais aos anteriormente referidos, sendo 0.7 e 0.2 m/s<sup>2</sup> para a direcção vertical e horizontal respectivamente. Uma verificação do critério de conforto em termos de acelerações deve ser realizada quando a frequência natural da estrutura é inferior a 5 Hz para a direcção vertical e inferior a 2.5 Hz para a direcção lateral.

#### 2.4.2 Norma BS 5400-Parte 2

A norma Britânica [27] refere limites de acelerações para estruturas cuja frequência natural do primeiro modo de vibração vertical,  $f_{1,vert}$  seja inferior a 5 Hz. O valor da aceleração limite é definido através da equação 2.13 e a aceleração produzida na estrutura terá que ser inferior a este em qualquer parte da mesma.

$$a_{lim,vert} = 0.5 \sqrt{f_{1,vert}} \quad (2.13)$$

#### 2.4.3 Norma ONT 83

A Norma canadiana ONT 83 [28], refere que a aceleração máxima na direcção vertical deve ser inferior ao valor definido na equação 2.14, não apresentando requisitos para a direcção lateral.

$$a_{lim,vert} = 0.25 \cdot f_{1,vert}^{0.78} \quad (2.14)$$

#### 2.4.4 Sétra//AFGC Guidelines

Ao contrário dos limites de conforto estabelecidos na maioria das normas existentes, neste guia os critérios de conforto não são propostos como valores absolutos, mas dependem da classe definida para a estrutura e do nível de conforto desejado pelo projectista. Assim, tal como foi referido anteriormente, estas estruturas são classificadas em quatro classes, dependendo do nível de tráfego a que a ponte pode estar sujeita, podendo ser definidos igualmente quatro níveis de conforto (máximo, médio, mínimo e desconforto) com os respectivos limites de aceleração, tabelas 2.10 e 2.11.

Quando o fenómeno de sincronização lateral tem de ser evitado, não deve ser excedida uma aceleração lateral de 0.1 m/s<sup>2</sup>.

Tabela 2.10: Acelerações verticais máximas, Sétra

Grau de Conforto	Aceleração máxima [m/s <sup>2</sup> ]
Máximo	< 0.5
Médio	< 1.0
Mínimo	< 2.5
Desconforto	≥ 2.5

Tabela 2.11: Acelerações laterais máximas, Sétra

Grau de Conforto	Aceleração máxima [m/s <sup>2</sup> ]
Máximo	< 0.15
Médio	< 0.3
Mínimo	< 0.8
Desconforto	≥ 0.8

## Capítulo 3

### Caso de estudo

O objectivo deste capítulo é estudar o comportamento da estrutura quando sujeita à acção de uma multidão de pessoas, de modo a evidenciar e avaliar a ocorrência de problemas de vibração excessiva.

A estrutura em estudo é uma ponte pedonal ciclável localizada entre as Olaias e o parque da Bela Vista, em Lisboa. Trata-se de uma ponte que faz parte da rede ciclável de Lisboa e permite a ligação das duas encostas. No período em que o estudo da estrutura foi realizado, esta ainda se encontrava em fase de construção, tendo o seu projecto sido cedido para efeitos académicos.



Figura 3.1: Vista da ponte da Bela Vista

## 3.1 Modelação da Estrutura

### 3.1.1 Características da estrutura

A ponte pedonal é formada por três vãos, com um comprimento total de 140 metros e 5 metros de largura. Os vãos de extremidade e o vão central têm respectivamente 42 e 56 metros de comprimento, encontrando-se apoiados em dois pilares com alturas de 13 e 20 metros. A secção transversal do passadiço encontra-se representada na figura 3.3. Esta é constituída por duas vigas metálicas de altura variável, 1.25 metros nos apoios de extremidade e 2.5 metros de altura nos apoios centrais, sendo que no vão central a mesma varia de 2.5 metros de altura nos apoios para 1.25 metros a meio vão. O pavimento é constituído por uma chapa metálica com 6 mm de espessura, revestida com uma camada de betuminoso tipo “Slurry” com 3 cm de espessura, suportado por perfis HEB 120 (figura 3.4). Relativamente aos apoios exteriores o passadiço encontra-se apoiado numa estrutura de betão armado, correspondendo à restrição da translação em torno de x, y e z no modelo analítico.

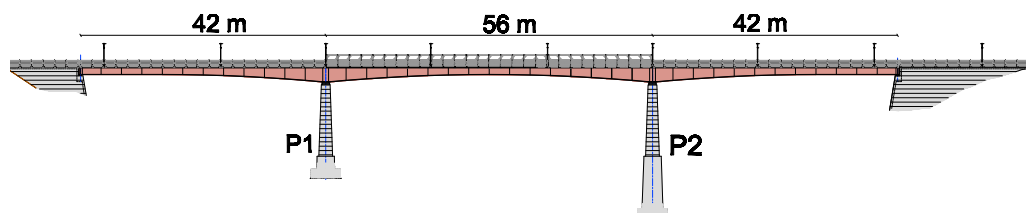


Figura 3.2: Alçado da estrutura

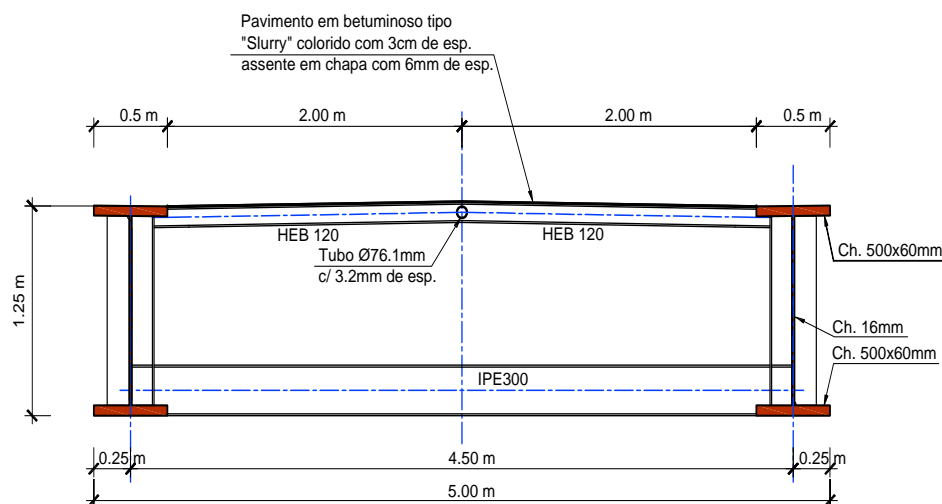


Figura 3.3: Secção transversal (meio vão)

### 3.1.2 Definição dos materiais

Na estrutura do passadiço é utilizado o aço estrutural S355 com as seguintes características:

Tabela 3.1: Características do material do passadiço

Peso específico [KN/m <sup>3</sup> ]	78.5
Módulo de elasticidade [GPa]	210
Coeficiente de Poisson	0.3
Coeficiente de expansão térmica [°C]	$1 \times 10^{-5}$

Relativamente aos pilares os materiais utilizados são o C30/37 e o aço estrutural A500 NR com as seguintes características:

Tabela 3.2: Características dos materiais dos pilares

C30/37	Peso específico [KN/m <sup>3</sup> ]	25
	Módulo de elasticidade [GPa]	33
	Coeficiente de Poisson	0.2
	Coeficiente de expansão térmica [°C]	$1 \times 10^{-5}$
A500 NR	Peso específico [KN/m <sup>3</sup> ]	77
	Módulo de elasticidade [GPa]	210
	Coeficiente de Poisson	0.3

### 3.1.3 Definição dos elementos estruturais

A modelação da ponte pedonal foi realizada através do programa de elementos finitos Sap2000[29], pelo que torna-se necessária a definição das propriedades da estrutura no mesmo.

Tal como referido anteriormente, o passadiço é formado por duas vigas com secção em “I” de altura variável e/ou largura variável da alma. Para a definição deste elemento foi necessário modelar as vigas por troços, de maneira a conseguir definir a variação das secções. Assim, para efeitos de modelação, cada uma das duas vigas foi dividida em 120 troços e, com o auxílio do programa Autocad, calculou-se o centro de gravidade de cada troço. Após calculada a variação do centro de gravidade e a altura de cada troço, definiram-se as diferentes secções no programa Sap2000[29], e posicionou-se cada troço considerado na sua posição respectiva. Com este método foi possível representar a variação de altura da viga, definindo-se alturas médias para cada troço. Na tabela 3.3 apresentam-se as propriedades geométricas dos diferentes troços adoptados.

Transversalmente às vigas longitudinais, o passadiço é composto por perfis HEB120 na parte superior, com a configuração da figura 3.4, encontrando-se apenas representado um troço de comprimento igual a 3.5 metros, repetindo-se este padrão ao longo do comprimento da ponte.

Inferiormente o passadiço é constituído por perfis IPE300 espaçados de 7 metros, e perfis HEB300 nos apoios.

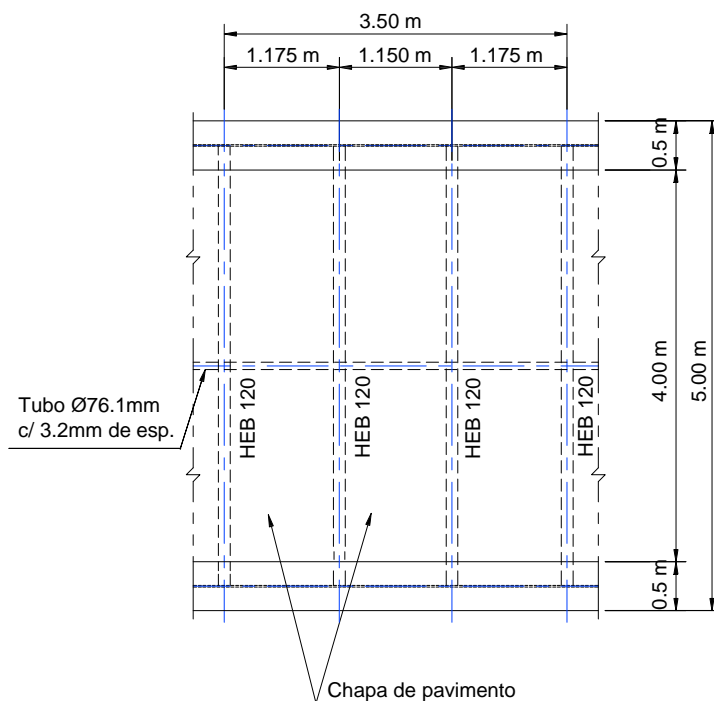


Figura 3.4: Pavimento do passadiço

Para efeitos de modelação não foi considerado o pavimento pois este não contribui para a resistência estrutural. Assim, foi calculado o peso da chapa metálica e da

Tabela 3.3: Propriedades geométricas do passadiço  
Vigas Longitudinais

Designação	Banzo		Alma $t_w$ [m]	Altura $h$ [m]
	$t_f$ [m]	$b$ [m]		
Tramo 1	0.06	0.5	0.016	1.25
Tramo 2	0.06	0.5	0.016	1.296
Tramo 3	0.06	0.5	0.016	1.379
Tramo 4	0.06	0.5	0.016	1.502
Tramo 5	0.06	0.5	0.02	1.667
Tramo 6	0.06	0.5	0.02	1.873
Tramo 7	0.06	0.5	0.025	2.121
Tramo 8	0.06	0.5	0.025	2.377
Tramo 9	0.06	0.5	0.025	2.5



camada de betuminoso e aplicados à estrutura como uma acção permanente ao longo das vigas HEB120. Para isso calculou-se a área de influência das vigas transversais e aplicou-se uma carga uniformemente distribuída nas mesmas.

O pórtico de apoio ao passadiço do lado Oeste identificado na figura 3.2 como P1 tem 13 metros de altura, sendo constituído por dois pilares e por uma travessa de betão armado, ambos rectangulares. O pórtico do lado Este, pórtico P2 da mesma figura, é formado por duas travessas de betão armado espaçadas por 11 metros e unidas por dois pilares. Inferiormente, o mesmo pórtico é suportado por dois pilares com 9 metros de altura, prefazendo os 20 metros de altura total. As secções dos dois pórticos de apoio ao passadiço encontram-se definidas na tabela 3.4.

Tabela 3.4: Propriedades geométricas dos apoios

	Designação	Secção [m]	Comprimento [m]
Pórtico 1	Pilar	1.85x1	13
	Travessa	1x1.5	4.5
Pórtico 2	Pilar superior	1.85x1	11
	Travessa superior	1x1.5	4.5
	Pilar inferior	3x2	9
	Travessa inferior	1x2.3	4.5

Os apoios de betão representam cerca de 65 % da massa total da estrutura. Por este motivo, e com o objectivo de obter os modos de vibração apropriados, optou-se por simplificar a estrutura. Assim, foi calculada uma rigidez equivalente dos pilares, introduzindo o seu valor no modelo, conseguindo desta forma eliminar os modos de vibração irrelevantes para o estudo em causa.

### 3.1.4 Acções permanentes

Para além do peso próprio da estrutura, é necessário ter em conta as restantes cargas permanentes. Assim, foram definidas as cargas devidas ao pavimento, revestimento e guarda corpos. O pavimento é constituído por uma chapa metálica com 6 mm de espessura e por um revestimento com 3 cm de espessura em betuminoso. Para o revestimento da estrutura foi considerada uma carga uniformemente distribuída com valor constante. Relativamente às guardas metálicas foi considerado igualmente um valor contante aplicado ao longo das vigas longitudinais de altura variável. No quadro 3.5 apresenta-se uma síntese das cargas aplicadas na estrutura.

Tabela 3.5: Cargas permanentes da estrutura

Chapa do pavimento [KN/m <sup>2</sup> ]	0.471
Revestimento [KN/m <sup>2</sup> ]	0.450
Guardas metálicas [KN/m]	1.0

### 3.1.5 Modelo final

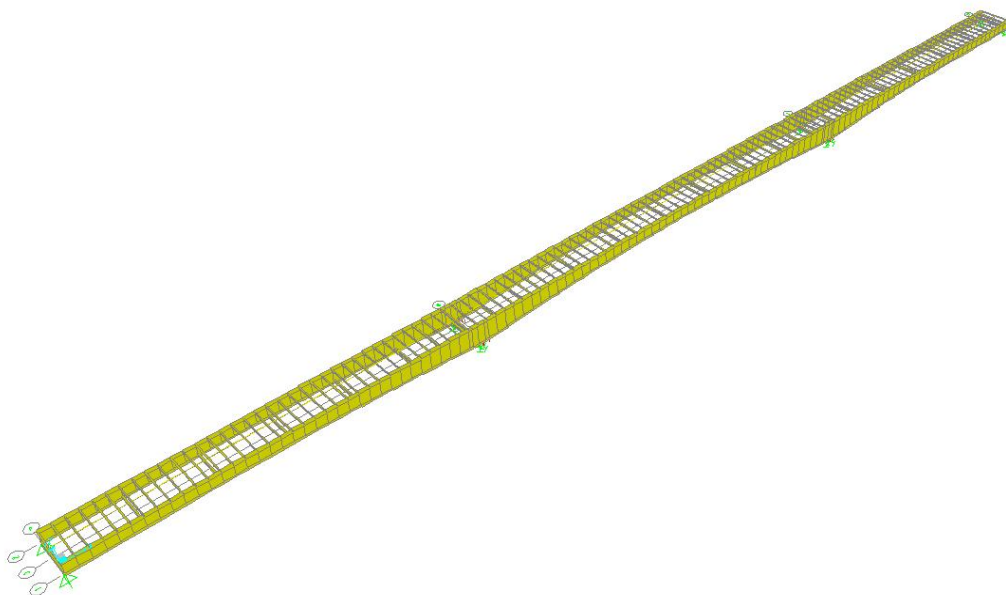


Figura 3.5: Modelo final vista 3d



Figura 3.6: Modelo final vista XZ

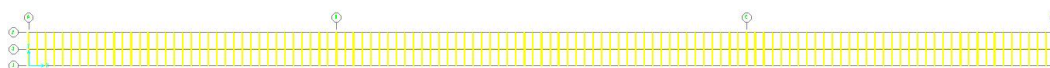


Figura 3.7: Modelo final vista XY

## 3.2 Características dinâmicas

### 3.2.1 Frequências próprias e modos de vibração

As frequências próprias e os modos de vibração de uma estrutura podem ser obtidos com base na análise do movimento em regime livre e sem amortecimento. Assim, a equação de equilíbrio dinâmico pode ser escrita por:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{Z}}(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{Z}(t) = 0 \quad (3.1)$$

A resolução desta equação leva ao conhecimento de algumas características dinâmicas como as frequências de vibração e as formas modais. Estas características são intrínsecas de cada estrutura e dependem unicamente da sua massa e rigidez.

Os cálculos foram realizados através do programa de cálculo Sap2000 [29], que procede inicialmente à montagem das matrizes de rigidez e de massa e posteriormente ao cálculo das frequências e modos de vibração através da equação:

$$(\mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M}_s) \phi = 0 \quad (3.2)$$

onde:

$\mathbf{K}_s$ - matriz de rigidez da estrutura;

$\omega$ - frequência angular da estrutura;

$\mathbf{M}_s$ - matriz de massa da estrutura;

$\phi$ - vector próprio.

Para que o sistema de equações tenha uma solução não trivial, ou seja  $\phi \neq 0$ , é necessário que se anule o primeiro factor da equação anterior. Logo, a determinação de frequências e modos de vibração é realizada através do determinante do primeiro factor, onde para cada valor próprio (frequência) corresponde um vector próprio ( $\phi$ ) associado a essa frequência. Este último representa o modo de vibração da estrutura correspondente à vibração na frequência respectiva.

Na tabela 3.6 é apresentada uma selecção dos primeiros 10 modos de vibração da estrutura, calculadas através do programa de cálculo Sap2000 [29], nas direcções vertical e lateral, negligenciando assim os respectivos modos de vibração na direcção longitudinal.

Tabela 3.6: Períodos e frequências dos primeiros 10 modos de vibração

Modo	Período [s]	Frequência [Hz]	Direcção
1	1.788	0.559	Lateral
2	1.290	0.775	Lateral
3	1.212	0.825	Lateral
4	0.679	1.474	Lateral
5	0.585	1.709	Vertical
6	0.461	2.168	Lateral
7	0.443	2.260	Lateral
8	0.357	2.804	Vertical
9	0.352	2.845	Lateral
10	0.243	4.117	Vertical

De maneira a verificar os resultados fornecidos pelo programa de cálculo, calculou-se analiticamente as frequências naturais da estrutura na direcção vertical. Para tal, foi realizado um modelo numérico com três graus de liberdade, conforme representado na figura 3.8.

Conhecendo a matriz de massa e a matriz de rigidez, através da expressão 3.2, é possível calcular os modos de vibração e as respectivas frequências.

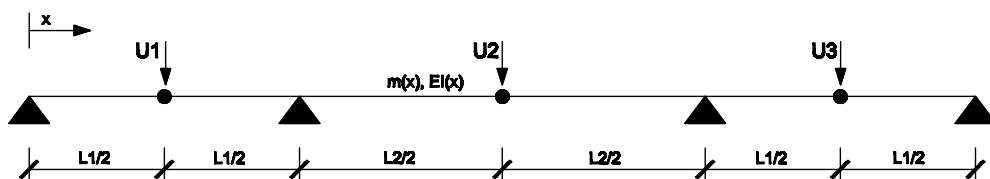


Figura 3.8: Graus de liberdade para verificação numérica

A obtenção da matriz de massa e rigidez podem ser realizados por meio das equações 3.3 e 3.4, assumindo uma função de forma polinomial e utilizando os valores definidos no anexo A:

$$m_{i,j} = \int_0^L m(x) [\psi_i(x) \psi_j(x)] dx \quad (3.3)$$

$$k_{i,j} = \int_0^L EI(x) [\psi_i''(x) \psi_j''(x)] dx \quad (3.4)$$

onde:

$m(x)$ - Massa da estrutura por unidade de comprimento;

$EI(x)$ - Rigidez da estrutura por unidade de comprimento;

$L$ - Comprimento da estrutura;

$\psi(x)$  - Função de forma.

Na tabela 3.7 apresentam-se os resultados obtidos e a respectiva diferença em relação ao modelo computacional em termos de frequências para os primeiros três modos verticais. Uma vez verificado o modelo computacional, procedeu-se à restante classificação dos modos de vibração e à aplicação dos carregamentos.

Tabela 3.7: Comparação entre modelo FEM e modelo analítico

Modo	Frequências [Hz]		Erro (%)
	Sap2000	3 GDL	
5	1.709	1.822	6.58
8	2.804	3.116	9.54
10	4.117	4.215	2.39

Na tabela 3.6 apenas se apresentam uma selecção dos primeiros 10 modos de vibração devido ao facto de, para os restantes modos, a estrutura teria que ser solicitada por harmónicas superiores, que não têm uma amplitude que possa provocar vibrações excessivas em comparação com as harmónicas inferiores. Desta forma, apenas serão caracterizados os modos de vibração que são susceptíveis de causar desconforto devido a uma solicitação aplicada em ressonância com o primeiro ou com o segundo modo de vibração. Assim, apenas serão analisadas as primeiras duas harmónicas da função de carga devido a uma multidão.

Das tabelas é previsível a ocorrência de fenómenos de vibração excessiva, pois algumas frequências próprias da estrutura encontram-se num intervalo susceptível de serem solicitadas por uma acção pedonal:

- Direcção vertical:  $0 \text{ Hz} \geq f_v \leq 5 \text{ Hz}$
- Direcção Lateral:  $0 \text{ Hz} \geq f_l \leq 2.5 \text{ Hz}$

Relativamente aos modos de vibração, são apresentados nas figuras 3.9 e 3.10 a configuração dos mesmos nas direcções lateral e vertical respectivamente.

(a) Modo 1  $f = 0.559$  Hz(b) Modo 2  $f = 0.775$  Hz(c) Modo 3  $f = 0.825$  Hz(d) Modo 4  $f = 1.474$  Hz(e) Modo 6  $f = 2.168$  Hz(f) Modo 7  $f = 2.260$  Hz(g) Modo 9  $f = 2.845$  Hz

Figura 3.9: Modos de vibração laterais, vista XY

(a) Modo 5  $f = 1.709$  Hz(b) Modo 8  $f = 2.804$  Hz(c) Modo 10  $f = 4.117$  Hz

Figura 3.10: Modos de vibração verticais, vista XZ

Por observação das figuras anteriores, das frequências e das participações de massa, é possível estimar que existirão na estrutura 13 pontos críticos, que irão fornecer as acelerações máximas decorrentes dos carregamentos pedonais (figura 3.11).

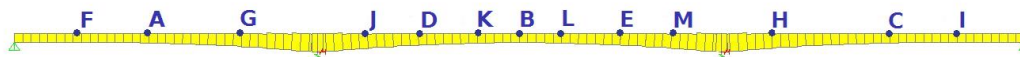


Figura 3.11: Pontos críticos vista XY

### 3.2.2 Identificação de problemas de vibração excessiva

O primeiro passo para a definição dos carregamentos possíveis de ocorrerem na estrutura passa pela classificação desta, ou seja, uma classificação baseada no tipo de tráfego expectável. Assim, tal como foi referido no segundo capítulo, são distinguidas quatro classes de tráfego:

- Classe I: Multidão muito densa (1 pessoa /m<sup>2</sup>)
- Classe II: Multidão densa (0.8 pessoa /m<sup>2</sup>)
- Classe III: Multidão escassa (0.5 pessoa /m<sup>2</sup>)
- Classe IV: Pontes pedonais raramente utilizadas

No caso em estudo será analisada a influência do número de peões presentes na ponte. Assim, serão abordadas as Classes I, II e III com o objectivo de evidenciar o efeito do aumento do número de peões em termos de acelerações na estrutura.

Como a ponte em questão é considerada uma estrutura muito leve, o peso estático dos peões poderá ter influência nas frequências próprias da estrutura. O peso estático da multidão foi aplicado sobre a viga central como uma carga uniformemente distribuída com componente vertical, definida na tabela 3.8, com o sentido da gravidade para cada classe em estudo. Apesar desta parcela não ter influência sobre a aceleração, o facto de estar presente uma multidão na estrutura poderá modificar as suas frequências, pois está a ser adicionada massa à mesma. Assim, são definidas três cargas devido ao peso estático da multidão:

Tabela 3.8: Carregamento estático para as diferentes classes

Classe	densidade	massa total de peões	carregamento/metro
I	1	441 KN	3.150 KN/m
II	0.8	352.8 KN	2.520 KN/m
III	0.5	220.5 KN	1.575 KN/m

Baseado no tipo de modelo de carregamento desejado, na tabela 3.9 são apresentadas as primeiras 11 frequências próprias da estrutura. O facto de se terem escolhido as mesmas deve-se ao risco de ressonância possível de ocorrer e, tal como foi referido anteriormente, por nestas frequências a amplitude do movimento pedonal ser dominante. É apresentado mais um modo de vibração do que os definidos anteriormente, de maneira a verificar que o mesmo se encontra fora dos limites da acção pedonal definidos no capítulo 2.

Tabela 3.9: Frequências e direcções dos primeiros 11 modos

	densidade = 1	densidade = 0.8	densidade = 0.5	densidade = 0	
Modo	Frequência [Hz]	Frequência [Hz]	Frequência [Hz]	Frequência [Hz]	Direcção
1	0.520	0.527	0.539	0.559	Lateral
2	0.721	0.731	0.746	0.775	Lateral
3	0.767	0.778	0.795	0.825	Lateral
4	1.374	1.392	1.421	1.474	Lateral
5	1.588	1.610	1.646	1.709	Vertical
6	2.024	2.050	2.092	2.168	Lateral
7	2.104	2.133	2.178	2.260	Lateral
8	2.596	2.634	2.695	2.804	Vertical
9	2.651	2.687	2.743	2.845	Lateral
10	3.780	3.843	3.941	4.117	Vertical
11	3.924	3.979	4.064	4.219	Lateral
12	5.955	6.095	6.193	6.394	Vertical



Com base nas frequências apresentadas na tabela 3.9 é possível caracterizar os diferentes carregamentos tendo por base as tabelas 2.6 e 2.7. Desta forma, é apresentado na tabela 3.10, a classificação dos casos dos carregamentos considerados para cada modo de vibração.

Tabela 3.10: Casos de carregamento

modo	Frequência [Hz]	Direcção	Caso de carregamento
1	0.559	Lateral	Grau 1
2	0.775	Lateral	Grau 1
3	0.825	Lateral	Grau 1
4	1.474	Lateral	Grau 3
5	1.709	Vertical	Grau 1
6	2.168	Lateral	Grau 3
7	2.260	Lateral	Grau 3
8	2.804	Vertical	Grau 3
9	2.845	Lateral	Grau 4
10	4.117	Vertical	Grau 3
11	4.219	Lateral	Grau 4
12	6.394	Vertical	Grau 4

### 3.2.3 Cálculo das acções dinâmicas

Dependendo da classe da ponte e da classificação das suas frequências podem ser quantificadas as acções pedonais a ter em conta. Assim, uma vez identificados os modos de vibração susceptíveis de sofrerem vibrações excessivas, as acções dinâmicas são definidas para cada modo em questão e para cada direcção, relacionadas com a respectiva vibração em risco de ressonância. Os diferentes carregamentos são calculados igualando a frequência da solicitação à frequência natural da estrutura, de maneira a obter a máxima resposta da mesma. Para a definição dos mesmos é necessário estimar o nível de amortecimento da ponte. Tendo em conta os valores definidos no capítulo 2, foi adoptado um valor de 1 % de amortecimento para ambas as direcções, calculado através de uma média ponderada do amortecimento do aço e do betão armado e da respectiva contribuição na rigidez global[7]:

$$\zeta = \frac{\sum_m \zeta_m EI_m}{\sum_m EI_m} \quad (3.5)$$

Assim, para cada direcção de movimento estudada foi estimada a respectiva rigidez, considerando apenas a contribuição das duas vigas metálicas longitudinais e os respectivos pilares. Desta forma, por meio da equação anterior estimou-se o respectivo amortecimento da estrutura, obtendo o valor anteriormente referido de 1 %.

Tal como foi referido anteriormente não se irá fazer distinção entre as classes da ponte, tendo em vista a caracterização dos carregamentos em função do número de peões presentes na mesma. Assim, pode ser definido o número equivalente de peões para cada classe de tráfego conforme definido na tabela 3.11, com base nas expressões definidas na tabela 2.5.

Tabela 3.11: Número equivalente de peões para cada classe

Classe	$d$	$N = d \cdot Area$	$N_{eq}$
I	1	630	46.435
II	0.8	504	24.246
III	0.5	315	19.168

Tendo em conta o pressuposto de que a acção de uma multidão é obtida através de um número equivalente de peões, multiplicando a acção de um peão pelo mesmo, será obtida uma força por unidade de comprimento devida à multidão. Assim, calculando a força induzida por um peão com a contribuição da primeira harmónica, através do primeiro termo das séries de Fourier, multiplicada pelo número equivalente de peões, será obtido o efeito da multidão.

Para o peso estático dos peões foi assumido um valor médio de 700 N, e para os valores dos coeficientes de carga dinâmicos um valor de 0.4 e 0.05 para as direcções vertical e lateral respectivamente. Assim, o valor total da força induzida por uma multidão para a primeira harmónica pode ser definida por:

Tabela 3.12: Força por unidade de comprimento para o 1º modo

Direcção	Força por unidade de comprimento
Vertical	$280 \cdot N_{eq} \psi / L \cdot \sin(2\pi f_v t)$
Lateral	$35 \cdot N_{eq} \psi / L \cdot \sin(2\pi f_l t)$

Conforme foi descrito no capítulo 2 a força devido à multidão é modificada por um factor  $\psi$ , definido como o risco de ressonância do modo de vibração em consideração. Este diminui à medida que se afasta do intervalo de frequências de grau 1, chegando a ser nulo para os graus 3 e 4.

No caso dos modos que têm frequências mais elevadas apenas poderão ser solicitados pela segunda harmónica, pelo que a força por unidade de comprimento terá que ter em consideração o segundo termo da série de Fourier. Assim, adoptando os valores de 0.1 e 0.01 para os factores de carga dinâmicos para as direcções vertical e lateral respectivamente, a força por unidade de comprimento pode ser definida por:

Tabela 3.13: Força por unidade de comprimento para o 2º modo

Direcção	Força por unidade de comprimento
Vertical	$70 \cdot N_{eq} \psi / L \cdot \sin(2\pi f_v t)$
Lateral	$7 \cdot N_{eq} \psi / L \cdot \sin(2\pi f_l t)$

Na tabela 3.14 são apresentados os valores adoptados para cada carregamento estudado, tendo em conta os valores definidos nas tabelas 3.12 e 3.13. Nos carregamentos para a segunda harmónica apenas foram efectuados os mesmos para os casos das classes I e II, pois nesse caso fenómenos de vibrações excessivas não terão a mesma probabilidade de ocorrerem, visto a amplitude da força ser muito baixa.

Tabela 3.14: Definição dos carregamentos pedonais

Caso		Direcção	$\psi$	$N_{eq}$	Força [N/m]
Modo 1	Classe I	Lateral	1	46.4346	11.609
	Classe II	Lateral	1	24.2459	6.062
	Classe III	Lateral	1	19.1681	4.792
Modo 2	Classe I	Lateral	1	46.4346	11.609
	Classe II	Lateral	1	24.2459	6.062
	Classe III	Lateral	1	19.1681	4.792
Modo 3	Classe I	Lateral	1	46.4346	11.609
	Classe II	Lateral	1	24.2459	6.062
	Classe III	Lateral	1	19.1681	4.792
Modo 4	Classe I	Lateral	0.184	46.4346	0.428
	Classe II	Lateral	0.230	24.2459	0.279
Modo 5	Classe I	Vertical	0.840	46.4346	78.010
	Classe II	Vertical	0.872	24.2459	42.285
	Classe III	Vertical	0.9223	19.1681	35.358
Modo 6	Classe I	Lateral	1	43.4346	2.322
	Classe II	Lateral	1	24.2459	1.212
Modo 7	Classe I	Lateral	0.989	46.4346	2.297
	Classe II	Lateral	0.918	24.2459	1.113
Modo 8	Classe I	Vertical	0.069	46.4346	6.378
	Classe II	Vertical	0.043	24.2459	0.520
Modo 10	Classe I	Vertical	1	46.4346	23.217
	Classe II	Vertical	1	24.2459	12.123

O procedimento adoptado implica em primeiro lugar a definição analítica das cargas conforme a tabela 3.14 e, posteriormente, a sua aplicação no programa de cálculo Sap2000. Assim, a multidão foi considerada uniformemente distribuída ao longo do passadiço da ponte, aplicando uma carga com os valores da tabela 3.8, de maneira a ter em conta o peso estático da mesma. Para a definição dos carregamentos pedonais e com o auxílio do programa MATLAB [30], foram definidos os “*time-history’s*” das funções de carga para cada caso estudado, tendo sido posteriormente importados para o programa Sap2000 através de um ficheiro .txt, calculado por meio do algoritmo disposto no anexo E. Uma vez definida a variação da força ao longo do tempo é necessário proceder à aplicação da mesma na estrutura. Para isso aplicou-se uma carga com valor unitário, com a direcção do modo de vibração a ser solicitado e posteriormente definiu-se uma “*load case*” do tipo linear “*time-history*” onde se definiram as seguintes opções:

- *Load case type: Time-history*
- *Analysis type: Linear*
- *Time-history type: Modal*
- *Time-history Motion type: Periodic*
- *Modal load case: Modal*

Em relação ao campo “*loads applied*” foram definidos os seguintes parâmetros:

- *Load type: Load pattern*
- *Load name: Carga com valor unitário*
- *Function: Time-history para cada modo em estudo*
- *Scale factor: 1*

Este procedimento foi adoptado para cada modo de vibração estudado, alterando a direcção da carga de valor unitário e o “*time-history*” conforme o caso. No campo “*Modal load case*” foi definida uma análise modal onde apenas será utilizado o modo de vibração correspondente, de maneira a conseguir obter os resultados para o modo em estudo. No caso em que se considera a segunda harmónica são definidos dois carregamentos com duas análises modais, um para a segunda harmónica e outro para a primeira, onde se utiliza um valor da frequência da segunda harmónica igual ao dobro da primeira.

Todos os carregamentos foram aplicados à estrutura com a direcção do modo de vibração (figura 3.12) e com uma frequência igual à frequência natural da estrutura [7]. Na tabela 3.15 são apresentadas as acelerações máximas obtidas para cada caso estudado.



(a) Modo 5 vertical



(b) Modo 4 lateral

Figura 3.12: Direcção da força unitária

Tabela 3.15: Acelerações máximas para cada caso

Caso		Direcção	Frequência [Hz]	Aceleração [m/s <sup>2</sup> ]	Limite
Modo 1	Classe I	Lateral	0.520	<b>0.407</b>	0.1
	Classe II	Lateral	0.527	<b>0.218</b>	0.1
	Classe III	Lateral	0.539	<b>0.180</b>	0.1
Modo 2	Classe I	Lateral	0.721	<b>0.350</b>	0.1
	Classe II	Lateral	0.731	<b>0.188</b>	0.1
	Classe III	Lateral	0.746	<b>0.155</b>	0.1
Modo 3	Classe I	Lateral	0.767	<b>0.356</b>	0.1
	Classe II	Lateral	0.778	<b>0.191</b>	0.1
	Classe III	Lateral	0.795	<b>0.157</b>	0.1
Modo 4	Classe I	Lateral	1.374	<b>0.105</b>	0.1
	Classe II	Lateral	1.392	0.055	0.1
Modo 5	Classe I	Vertical	1.588	<b>2.740</b>	1
	Classe II	Vertical	1.610	<b>1.523</b>	1
	Classe III	Vertical	1.646	<b>1.324</b>	1
Modo 6	Classe I	Lateral	2.024	0.072	0.1
	Classe II	Lateral	2.020	0.026	0.1
Modo 7	Classe I	Lateral	2.104	0.072	0.1
	Classe II	Lateral	2.133	0.036	0.1
Modo 8	Classe I	Vertical	2.596	0.150	1
	Classe II	Vertical	2.634	0.064	1
Modo 10	Classe I	Vertical	3.780	0.846	1
	Classe II	Vertical	3.843	0.450	1

Considerando os limites de aceleração propostos pela Sétra Guidelines e considerando um nível de conforto médio, a ponte pedonal apresenta acelerações que serão perceptíveis pelos peões. A maior aceleração obtida corresponde ao

modo 5, o primeiro modo vertical, enquanto que para carregamentos aplicados em ressonância com o segundo modo de vibração nesta direcção, os limites não chegam a ser excedidos. Neste contexto, na direcção vertical, apenas são verificados valores superiores aos regulamentados no caso de carregamentos aplicados em ressonância com o primeiro modo de vibração.

Em relação aos primeiros modos laterais os limites são sempre excedidos, enquanto que, para os modos que só conseguem ser excitados pela segunda harmónica, os mesmos limites não chegam a ser alcançados, com excepção do modo 4 em que o limite é ligeiramente excedido. Relativamente à localização das máximas acelerações na estrutura, na direcção vertical ocorre no meio vão central, ponto B da figura 3.11. Na direcção lateral, para os primeiros três modos, a máxima aceleração ocorre a metade de cada vão, ou seja nos pontos B, A e C respectivamente. No caso dos carregamentos dos modos 6 e 7 as máximas acelerações ocorrem a um quarto dos vãos laterais, sensivelmente nos pontos F e H. Desta forma, é possível estimar que a possibilidade de ocorrência do efeito *lock-in* poderá dar-se a partir de uma multidão com 190 peões a atravessar a estrutura.

Assim, conclui-se que a estrutura é sensível a solicitações laterais e verticais para os primeiros modos de vibração e, apesar de os limites serem excedidos para todas as classes consideradas, uma correcta medição do amortecimento da estrutura depois da sua construção provavelmente resultaria em melhores resultados. Apesar de ser desconhecido se o amortecimento é suficientemente elevado, um sistema de controlo deverá ser dimensionado e instalado, caso a estrutura não tenha o amortecimento desejado.

## Capítulo 4

# Controlo de vibrações

No presente capítulo serão abordadas duas soluções para problemas de vibrações excessivas devido a carregamentos pedonais. Estas soluções incluem amortecedores de massa sintonizada e amortecedores de massa activa. Serão apresentadas as equações de movimento que permitem representar o comportamento de sistemas dinâmicos. As equações do movimento serão reescritas segundo a representação em espaço de estados, as quais são necessárias para o sistema de controlo. Será igualmente apresentada a modelação das equações em diagrama de blocos.

### 4.1 Amortecedor de massas sintonizadas

Um amortecedor de massa sintonizada ou TMD (*Tuned mass damper*) consiste numa massa que é fixada à estrutura através de uma mola e de um amortecedor dispostos em paralelo, actuando como um sistema de um grau de liberdade adicional cuja frequência se situa ligeiramente abaixo da frequência que se pretende controlar. Deste modo, a acção de controlo exercida na estrutura deve-se à acção conjunta da mola e do amortecedor sobre a estrutura principal, a qual é função do tempo e actua no sentido contrário ao movimento da estrutura [8].

Com a introdução de uma massa secundária à estrutura principal, é introduzido um grau de liberdade adicional. Desta forma, o sistema principal, que inicialmente continha uma dada frequência, passará a ter duas frequências, uma inferior e outra superior à frequência inicial, devido ao grau de liberdade adicionado. Assim, por meio do movimento relativo entre a estrutura principal e o TMD é possível a dissipação de energia[31].

Por outro lado, um TMD é um sistema passivo que apenas é efectivo numa estreita banda de frequências. Com isto, se uma estrutura tiver as suas frequências suficientemente afastadas entre si, um TMD sintonizado para uma determinada frequência apenas irá produzir efeitos nessa mesma gama de frequências, verificando-se que o mesmo não tem qualquer efeito nas restantes. Em suma,

pode concluir-se que um TMD sintonizado para um determinado modo de vibração não produzirá efeito nos restantes modos. Conclui-se, igualmente, que desta forma, serão precisos tantos TMD's quantos os modos de vibração que se pretenda controlar.

#### 4.1.1 Dimensionamento de TMD's

O modelo teórico do funcionamento de um TMD encontra-se representado na figura 4.1.1. Este é constituído por uma massa adicional  $m_2$ , ligada à estrutura principal, com uma massa modal  $m_1$  e uma rigidez modal  $K_1$ , através de uma mola e amortecedor com rigidez e amortecimento  $K_2$  e  $C_2$  respectivamente.

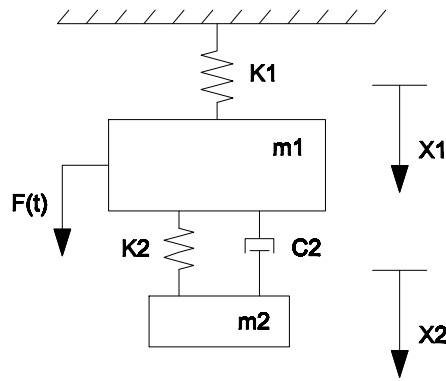


Figura 4.1: Modelo do funcionamento teórico de um TMD de massa  $m_2$

As equações do movimento do sistema são dadas por:

$$m_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 - K_2(x_2 - x_1) - C_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = F(t) \quad (4.1a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + K_2(x_2 - x_1) + C_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \quad (4.1b)$$

Assumindo a acção de uma força sinusoidal sobre a massa principal,  $F(t) = F_o \sin(\omega t)$  e uma solução do tipo:

$$x_j(t) = X_j e^{i\omega t} \quad j = 1, 2 \quad (4.2)$$

a amplitude da massa principal e da massa adicional são dadas por:

$$X_1 = \frac{F_0(k_2 - m_2\omega^2 + i c_2\omega)}{[(k_1 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - m_2 k_2 \omega^2] + i \omega c_2(k_1 - m_1\omega^2 - m_2\omega^2)} \quad (4.3)$$

$$X_2 = \frac{X_1(k_2 + i \omega c_2)}{k_2 - m_2\omega^2 + i \omega c_2} \quad (4.4)$$

Definindo os parâmetros:



$$\begin{aligned}\mu &= \frac{m_2}{m_1} - \text{Rácio entre a massa do TMD e a massa principal;} \\ X_{est} &= \frac{F_0}{k_1} - \text{Deslocamento estático do sistema;} \\ q_e &= \frac{\omega_2}{\omega_1} - \text{Rácio de frequências do TMD e da massa principal;} \\ \Omega_1 &= \frac{\omega}{\omega_1} - \text{Rácio de frequências da força e da massa principal;} \\ \xi &= \frac{c_2}{2\sqrt{k_2 m_2}} - \text{Coeficiente de amortecimento.}\end{aligned}$$

As equações 4.3 e 4.4 podem ser escritas por [32]:

$$\frac{k_1 X_1}{F_0} = \sqrt{\frac{(2\xi\Omega_1)^2 + (\Omega_1^2 - q_e^2)^2}{(2\xi\Omega_1)^2(\Omega_1^2 - 1 + \mu\Omega_1^2)^2 + [\mu q_e^2 \Omega_1^2 - (\Omega_1^2 - 1)(\Omega_1^2 - q_e^2)]^2}} \quad (4.5)$$

$$\frac{k_1 X_2}{F_0} = \sqrt{\frac{q_e^4 + (2\xi\Omega_1)^2}{(2\xi\Omega_1)^2(\Omega_1^2 - 1 + \mu\Omega_1^2)^2 + [\mu q_e^2 \Omega_1^2 - (\Omega_1^2 - 1)(\Omega_1^2 - q_e^2)]^2}} \quad (4.6)$$

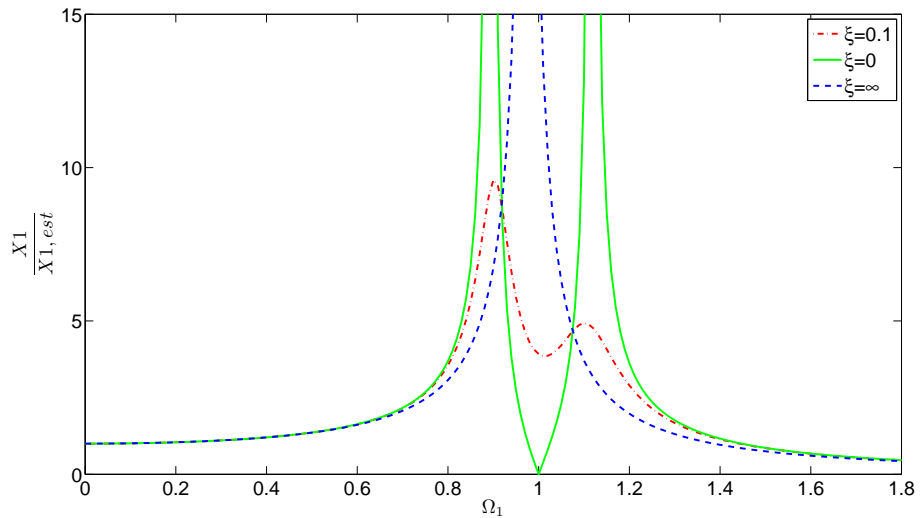


Figura 4.2: Amplitude do movimento da massa principal para  $\mu = 0.05$  e  $q_e = 1$  adotando diferentes valores de amortecimento do TMD

Na figura 4.2 é apresentada a amplitude do movimento da massa principal em função de  $\Omega_1$ . Variando o amortecimento do TMD   possível retirar algumas conclusões. Se o amortecimento for baixo, maiores valores de amplificação são obtidos perto das duas frequências de ressonância, isto porque o amortecedor

dissipa pouca energia. De facto, se  $\xi = 0$  a eliminação das vibrações em  $\Omega_1 = 1$  é possível. No entanto, tendo em conta a proximidade das frequências do sistema, o intervalo em que a força de excitação pode actuar por forma a evitar o fenómeno de ressonância é reduzido.

Na figura 4.3 é apresentado as duas frequências naturais do sistema em função do rácio de massas  $\mu$ , para um dado valor de  $q_e = 1$ . Verifica-se que o aumento de  $\mu$ , conduz a um maior desfazamento das duas frequências da estrutura relativamente à frequência considerada crítica de ser atingida. Desta forma, para valores reduzidos de  $\mu$  a banda de actuação do TMD é reduzida, e quanto maior for o respectivo rácio maior será o afastamento das suas frequências. Assim, torna-se importante que o valor de  $\mu$  seja o maior possível, tendo em conta que permite um maior desfazamento das frequências naturais e com isso um maior intervalo de actuação do sistema de controlo. No entanto, o seu valor encontra-se limitado devido a limitações arquitectónicas, pelo que deverá ser considerado o problema de conseguir alojar este sistema de controlo numa estrutura.

Com a consideração de um certo amortecimento, verifica-se que a eliminação das vibrações do sistema principal não é possível, mas sim reduzidas. Neste caso, é possível evitar grandes deslocamentos em condições de ressonância, aumentando o intervalo de frequências susceptíveis de serem excitadas. Se o amortecimento for demasiado elevado, o movimento relativo do TMD será demasiado baixo, levando a que o sistema TMD-estrutura actue como um só [5].

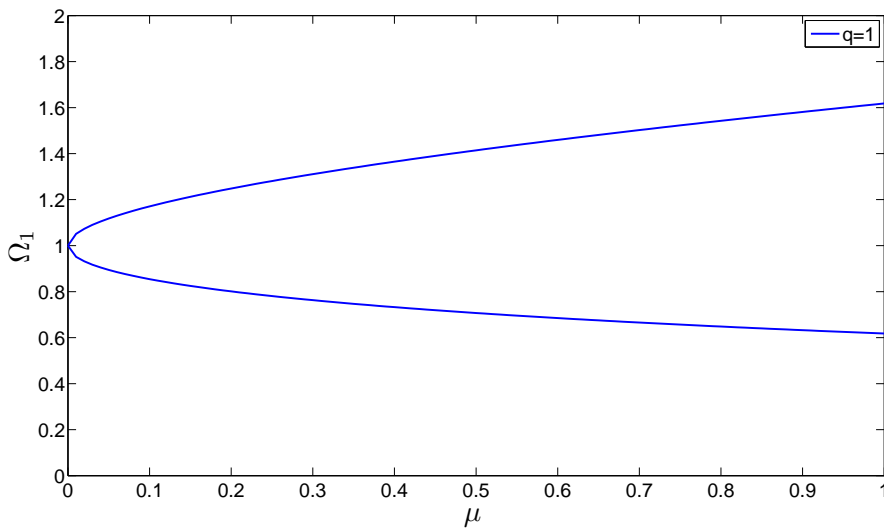


Figura 4.3: Variação das frequências naturais do sistema em função de  $\mu$  considerando  $q_e = 1$

O modelo de funcionamento de um TMD não tem em consideração o amortecimento existente no sistema principal. No entanto, a razão para que

se despreze o seu valor, deve-se ao facto do coeficiente de amortecimento do TMD ser mais efectivo em reduzir a resposta do sistema principal do que o amortecimento existente na estrutura. De facto, no caso do amortecimento ser reduzido ( $\xi \leq 1\%$ ), Bachmann e Weber[8] sugerem a aplicação das expressões deduzidas quando o amortecimento estrutural é nulo. Por outro lado, no caso de estruturas que possuam um coeficiente de amortecimento elevado, as expressões idealizadas para  $\xi = 0$ , originam erros consideráveis, sugerindo-se a consulta de ábacos obtidos por procedimentos numéricos, para determinação dos parâmetros óptimos do TMD [8].

Sintonizar um TMD implica escolher os seus parâmetros de maneira a que a amplitude da massa principal seja a menor possível. Da figura 4.2 é possível observar que para diferentes valores de amortecimento as curvas passam sempre por dois pontos em comum. Assim, o factor de amplificação dinâmico nestes pontos pode depender unicamente do rácio das massas. Do estudo de Den Hartog [33] [34], é possível concluir que os parâmetros óptimos são definidos quando as duas frequências de ressonância têm o mesmo factor de amplificação, pelo que definindo a frequência do TMD:

$$\omega_{2,opt} = q_{e,opt} \cdot \omega_1 = \frac{1}{1 + \mu} \cdot \omega_1 \quad (4.7)$$

o factor de amplificação dinâmico pode ser definido por:

$$\frac{X_1}{X_{1,est}} = \frac{K_1 X_1}{F_0} = \sqrt{\frac{2 + \mu}{\mu}} \quad (4.8)$$

Relativamente ao amortecimento do TMD o seu valor óptimo é dado por:

$$\xi_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad (4.9)$$

Na figura 4.4 é apresentada a resposta da estrutura com aplicação do TMD e sem a aplicação do mesmo. Verifica-se a eficiência deste tipo de sistema no controlo de vibrações excessivas na frequência para que foi sintonizado, observando-se que este mesmo sistema não produz qualquer efeito em frequências fora da sua banda de actuação. Verifica-se igualmente, que por meio da determinação dos parâmetros óptimos do TMD, a resposta da estrutura apresenta dois picos com igual amplitude, tal como é a base do seu dimensionamento.

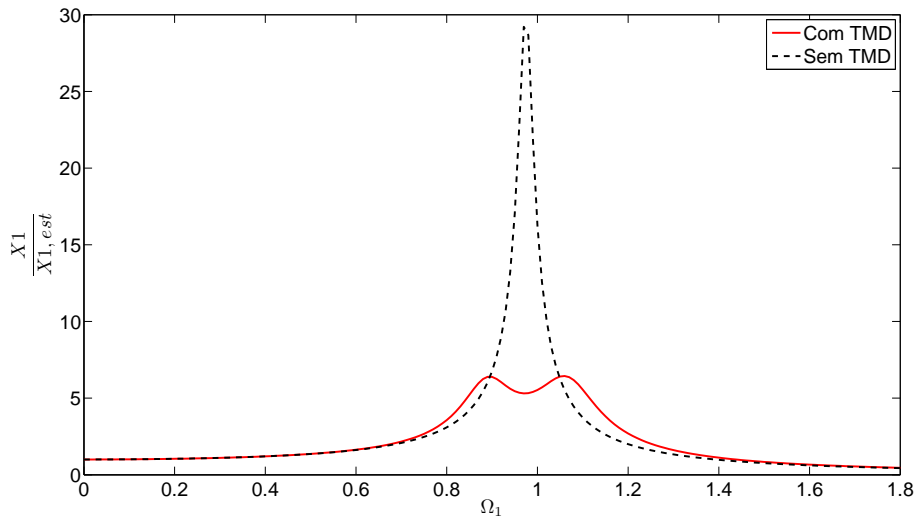


Figura 4.4: Resposta da estrutura controlada e não controlada

#### 4.1.2 Processo de dimensionamento

Uma vez caracterizados os parâmetros de aplicação de um TMD, que tem por base um sistema de 1 grau de liberdade ao qual foi adicionada uma segunda massa, tornando-o num sistema de 2 graus de liberdade, é necessário definir um modelo que traduza o comportamento dinâmico da estrutura. Tendo em conta que as estruturas reais são correntemente modeladas considerando múltiplos graus de liberdade, é necessário definir um sistema equivalente de um grau de liberdade que traduza o comportamento do sistema.

Desta forma, para cada modo de vibração em estudo é necessário calcular os valores da massa, rigidez e amortecimento modais. Dependendo da normalização dos modos de vibração, estes parâmetros podem assumir uma infinidade de valores. Visto isto, o critério adoptado corresponde à atribuição do valor unitário da componente modal, referente ao grau de liberdade associado à aplicação do TMD.

O programa Sap2000[29] adopta uma normalização do tipo  $\phi_n^T M \phi_n = 1$ , e para que o critério adoptado seja validado é necessário corrigir este valor. Assim, para que tal aconteça, é necessário multiplicar os parâmetros do sistema principal pelo quociente  $1/\phi_n^2$ , onde  $\phi_n$  corresponde ao valor inicial da componente do modo de vibração  $n$ , associado ao grau de liberdade de aplicação do TMD.

Tendo os parâmetros da estrutura calculados, o objectivo da introdução do TMD é reduzir a resposta da estrutura para um determinado valor, até que o valor da aceleração máxima seja inferior a um valor definido como aceleração admissível.

$$a_{max} \leq a_{adm} \quad (4.10)$$

Desta forma o segundo passo será definir a situação mais desfavorável, identificando o ponto onde a resposta é máxima e a respectiva função de carga, a qual é aproximada pela harmónica condicionante. A energia dissipada pelo TMD é proporcional à velocidade relativa do pavimento. Assim, como esta se relaciona com o deslocamento máximo, o TMD deverá ser localizado no ponto onde a componente do modo de vibração assume um valor máximo [1]. Considerando o valor máximo da aceleração que se pretende atingir, o respectivo deslocamento máximo pode ser calculado através de:

$$d_{max} = X_1 = \frac{a_{max}}{w_n^2} \quad (4.11)$$

e uma vez calculado o deslocamento estático:

$$X_{1,est} = \frac{F_0}{K_{1n}} \quad (4.12)$$

o respectivo factor de amplificação pretendido pode ser obtido através do quociente entre as equações 4.11 e 4.12, sendo possível posteriormente o cálculo da massa adicional  $\mu$  a considerar, através da equação 4.8, pelo que os valores típicos para a mesma situam-se entre [0.01; 0.05] [35]. Calculado o valor da massa adicional, os valores dos parâmetros óptimos do TMD podem ser obtidos.

O facto de existirem limitações arquitectónicas leva a que se tenha de ter em conta o espaço disponível para a concretização do TMD, nomeadamente a massa adicional e o deslocamento máximo ao nível da massa adicional, pelo que por vezes poderá não ser possível de instalar numa estrutura real. Assim, nesta situação, deverá ser dimensionado um conjunto de  $n$  TMD's, que uma vez colocados em diferentes posições da estrutura produzam o mesmo efeito que o TMD inicial. Desta maneira é possível conceber um conjunto de TMD's de menores dimensões e respeitar os critérios adoptados.

Conhecido o valor de  $\mu$  a adoptar de maneira a obter o factor de amplificação dinâmico desejado, é preciso definir o número e o posicionamento dos mesmos na estrutura. Desta maneira, calculando de forma independente os valores da massa modal ( $m_1$ ) correspondente à posição de cada TMD, considerando em cada um uma componente unitária do modo de vibração no ponto de aplicação, é possível calcular os valores das massas adicionais dos diversos TMD's como se cada um actuasse isoladamente ( $m_2 = \mu \cdot m_1$ ), adoptando para isso o valor de  $\mu$  calculado anteriormente. Desta forma é obtido um conjunto de  $n$  TMD's cuja actuação isolada será igual ao TMD inicial [8].

Porém, como os  $n$  TMD's vão contribuir para a resposta final, se fossem considerados os parâmetros calculados anteriormente, seria obtida uma resposta controlada maior do que a necessária. Assim, definindo  $\beta_i$  como um factor de

participação relativo a cada TMD, é possível afectar cada um pelo mesmo, de maneira a que se verifique a relação:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 1 \quad (4.13)$$

Este factor pode ser entendido como um parâmetro que define a contribuição que se pretende que cada TMD dê no controlo das vibrações na estrutura principal. Assim, o dimensionamento de um TMD pode ser sistematizado em:

1. Definição da situação mais desfavorável, identificando o ponto onde a aceleração é máxima;
2. Cálculo dos parâmetros da estrutura por forma a apresentar uma componente unitária do modo de vibração no ponto de aplicação do TMD;
3. Dimensionamento do TMD, calculando a sua massa ( $m_2 = \mu \cdot m_1$ ), rigidez ( $k_2 = \omega_{2,opt}^2 \cdot m_2$ ) e amortecimento ( $\xi_{2,opt}$ );
4. Dimensionamento de  $n$  TMD's, caso necessário, afectando cada um pelo factor de participação pretendido,  $\beta_i$ , de maneira a obter um conjunto de TMD's cuja actuação será igual ao TMD inicial.

Tal como foi referido, um TMD apenas é efectivo numa estreita banda de frequências, pelo que, no caso da estrutura apresentar níveis de vibrações excessivos em outras frequências, o TMD não produzirá qualquer efeito. Assim, é possível afirmar que a existência de vários dispositivos de controlo, sintonizados para diferentes frequências da estrutura, não produzirão qualquer alteração no comportamento da mesma, senão na frequência para que foram dimensionados.

Desta forma, torna-se importante que as frequências naturais da estrutura estejam bem separadas, por forma a evitar fenómenos de interferência modal. Com esta solução, é possível o dimensionamento independente de cada TMD, tendo apenas em consideração as propriedades modais, a harmónica condicionante, desprezando-se assim o efeito dos restantes TMD's sintonizados para diferentes frequências[8].

## 4.2 Amortecedor de massas activas

O controlo activo de vibrações em estruturas consiste na redução da resposta estrutural, através da aplicação de forças adicionais, associadas à utilização de uma fonte de energia exterior, tendo por base uma determinada estratégia de controlo. O objectivo deste tipo de sistemas de controlo é a actuação em tempo real sobre um determinado sistema, utilizando um modelo numérico (Controlador), capaz de determinar um conjunto de forças a actuar sobre a estrutura, por forma a obter o comportamento desejado da mesma [36].

Dentro dos tipos de actuadores possíveis de aplicar neste tipo de solução encontram-se: actuadores hidráulicos, electromagnéticos, pneumáticos e piezoeléctricos, entre outros. No âmbito deste trabalho não será restringido o tipo de actuação da força, mas sim a variação da mesma necessária para a acção de controlo.

Na figura 4.5 representa-se esquematicamente um sistema de controlo em malha aberta. Neste, o controlador aplica um conjunto de forças na estrutura de modo a que a mesma tenha o comportamento desejado. No entanto este tipo de sistema tem uma eficiência limitada, pois o controlador não recebe qualquer informação da resposta que realmente está a ser obtida [37]. Por outro lado na figura 4.6 é apresentado um sistema de controlo em malha fechada, em que o controlador conhece a cada instante os valores da resposta da estrutura e através deles realimenta o sistema, tendo por base uma determinada estratégia de controlo.

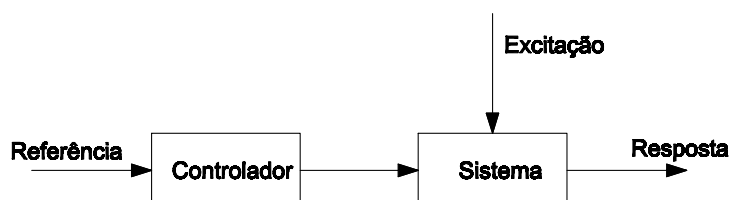


Figura 4.5: Esquema do sistema de controlo em malha aberta

A implementação de um sistema de controlo activo implica:

1. Desenvolvimento de um modelo numérico capaz de simular o comportamento dinâmico da estrutura, tendo em conta as suas características dinâmicas;
2. Dimensionamento de um controlador, tendo por base uma determinada estratégia de controlo, estabelecendo uma relação entre a resposta medida e o sinal de controlo;
3. Conjugação dos pontos anteriores, incluindo a medição das variáveis e a actuação das cargas necessárias.

O desenvolvimento do modelo numérico, tendo em conta as suas características e a sua representação em espaço de estados, é realizado na secção 4.3. A formulação em espaço de estados consiste em reescrever as equações do movimento num maior número de equações mas de grau inferior. Este tipo de formulação envolve três tipos de variáveis: as variáveis de estado  $x(t)$ , as variáveis de entrada  $u(t)$  e as variáveis de saída  $y(t)$ . As variáveis de estado consistem no menor conjunto de variáveis independentes, que conhecidos os seus valores para um instante  $t = t_0$  possibilitam conhecer o comportamento do

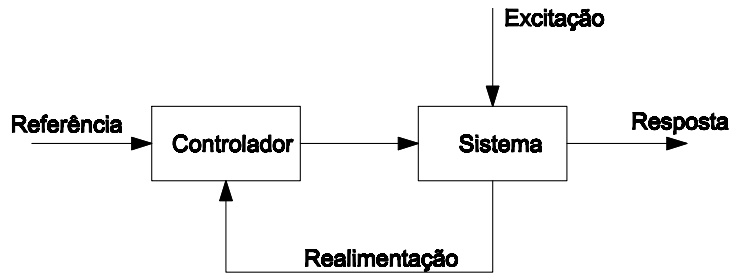


Figura 4.6: Esquema do sistema de controlo em malha fechada

sistema num instante  $t \geq t_0$ . As variáveis de entrada correspondem às acções exteriores impostas ao sistema, enquanto que as variáveis de saída, relacionam as variáveis de estado e as variáveis de entrada. No entanto, em algumas situações não é possível obter medições dos estados ou das entradas do sistema, pelo que as variáveis de saída retornam a informação relativa ao comportamento do sistema [37].

Assim, tendo em conta a formulação em espaço de estados, seguidamente torna-se necessário conceber o sistema de controlo de maneira a relacionar a resposta medida e o sinal de controlo. Desta forma, no âmbito deste trabalho, torna-se necessário compreender os diagramas de blocos de sistemas representados sob a formulação em espaço de estados. Com esta formulação, as variáveis e as operações envolvidas encontram-se no domínio do tempo, e os sistemas a controlar têm múltiplas entradas e saídas.

Considerando um sistema na sua forma em espaço de estados definido por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.14a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4.14b)$$

e definindo-se a acção de controlo  $u(t)$ , realimentada a partir do vector de estado,

$$u(t) = -Kx(t) \quad (4.15)$$

onde  $K$  é definida como a matriz de ganho do controlador e  $x(t)$  o vector de estado. Com esta formulação,  $K$  será um vector com apenas uma linha e  $n$  colunas equivalentes ao número de estados. Substituindo 4.15 em 4.14a obtêm-se:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (4.16)$$

Na figura 4.7 é apresentado o respectivo diagrama de blocos do sistema de controlo com retroacção negativa dos estados definido pelas equações anteriores.



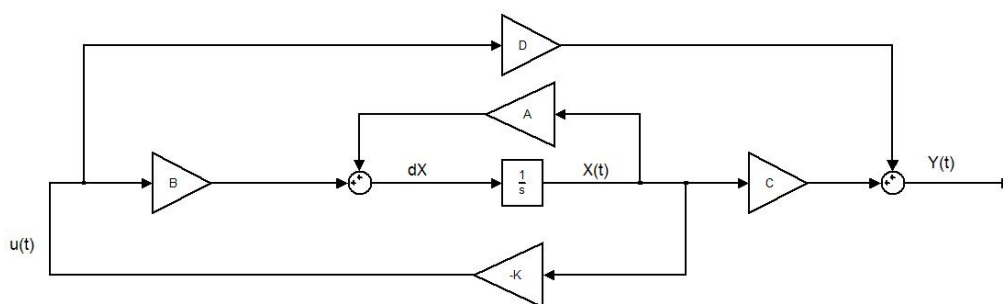


Figura 4.7: Diagrama de blocos de um sistema de controlo com retroacção de estados

Observe-se que as setas representam os fluxos dos sinais, que correspondem a vectores como os vectores de estado  $x(t)$ , de entrada  $u(t)$  e de saída  $y(t)$ . Os ganhos dos blocos consistem nas matrizes de estado  $A$ , entrada  $B$ , saída  $C$  e de transmissão directa  $D$ . O bloco  $K$ , corresponde à matriz de ganho do controlador, que consiste numa retroacção linear das variáveis de estado, sendo que o sinal negativo indica uma retroacção negativa.

#### 4.2.1 Dimensionamento do Controlador

Um sistema diz-se controlável se, por meio de uma acção de controlo  $u(t)$ , for possível transferi-lo de um estado inicial  $x(t_0)$  para um outro estado final  $x(t_f)$  num intervalo de tempo finito [38]. Sendo as matrizes  $A$  e  $B$  as matrizes de estado e de entrada do sistema, define-se matriz de controlabilidade por:

$$C_r = [ B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B ] \quad (4.17)$$

pelo que um sistema é completamente controlável se a matriz  $C_r$  tiver característica igual a  $n$ , ou seja, se tiver  $n$  linhas ou colunas linearmente independentes [36].

Se o sistema não for completamente controlável, a acção de controlo não consegue transferir todos os estados, pelo que existem modos de vibração impossíveis de alterar. Para que todos os estados sejam afectados pela acção de controlo terá de se alterar a posição do actuador, uma vez que a matriz de controlabilidade depende de  $A$  e  $B$  [39].

Analisando a equação 4.16, a acção de controlo modifica a matriz de estado do sistema e o problema passa por encontrar a matriz de ganho do controlador de maneira a conduzir ao controlo pretendido. Diversos métodos podem ser utilizados para o cálculo de  $K$ , entre eles encontra-se a estratégia de controlo óptimo, na qual as forças de controlo são determinadas minimizando uma função de custo, que é proporcional à energia total desenvolvida na estrutura ao longo do tempo de excitação [40], [36].

No âmbito deste trabalho apenas será desenvolvido o método de alocação de pólos, que apenas poderá ser utilizado se o sistema for controlável e observável. Este método é baseado na lei de controlo por realimentação, sendo que a matriz de ganho é escolhida de maneira a que a equação em espaço de estados tenha pólos iguais a valores previamente fixados [36].

A posição dos pólos  $p_i$  de um sistema obtém-se igualando o polinómio característico a zero, conforme apresentado no anexo B:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (4.18)$$

pelo que a sua posição está directamente relacionada com as frequências próprias e com o coeficiente de amortecimento, podendo escrever-se:

$$p_i = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (4.19)$$

onde  $\xi_i$  é o coeficiente de amortecimento,  $\omega_i$  a frequência própria e  $j$  é a unidade imaginária. Assim, definindo através da equação 4.19 a posição dos pólos pretendidos, e sabendo que os valores próprios de  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  se obtêm a partir das raízes do polinómio característico através de:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = 0 \Rightarrow s^n + a_1 s^{n-1} + \dots a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (4.20)$$

igualando os mesmos ao polinómio característico desejado:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots a_{n-1} s + a_n = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) \quad (4.21)$$

obtém-se os elementos que compõem a matriz  $\mathbf{K}$ , juntando os coeficientes que multiplicam iguais potências de  $s$ .

### 4.2.2 Observadores de Estado

Anteriormente, para o cálculo da força de controlo, foi assumido que todas as variáveis de estado estão disponíveis para a retroacção. Na prática nem todas as variáveis são medidas, pelo que será necessário estimar as mesmas. Um observador de estados permite estimar as variáveis de estado baseado nas medições das saídas num intervalo de tempo finito. É possível verificar que o dimensionamento de um controlador é independente do dimensionamento do observador, porém deverá garantir-se que a resposta do mesmo é duas a cinco vezes mais rápida que a resposta do sistema a controlar [36].

A observabilidade é a propriedade que permite determinar qualquer estado inicial  $x(t_0)$  a partir das medições efectuadas ao sinal de saída  $y(t)$ . Um sistema diz-se completamente observável se for possível estimar todos os seus estados. Definindo  $\mathbf{N}$  como a matriz de observabilidade:

$$\mathbf{N} = [ \mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{(n-1)} \mathbf{C}^T ] \quad (4.22)$$

um sistema diz-se completamente observável se a matriz  $N$  tiver característica  $n$  [38]. Assim, considerando o sistema descrito pelas equações 4.14a e 4.14b, e assumindo que o vector de estado  $x(t)$  é para ser aproximado pelo estado  $x_0(t)$ , as equações que descrevem a dinâmica do observador são:

$$\dot{x}_0(t) = Ax_0(t) + Bu(t) + K_e(y(t) - y_0(t)) \quad (4.23a)$$

$$y_0(t) = Cx_0(t) + Du(t) \quad (4.23b)$$

onde  $x_0(t)$  são os estados estimados e a saída do observador e as entradas correspondem aos vectores  $u(t)$  e  $y(t)$ . O termo  $y(t) - y_0(t)$  corresponde à diferença entre as saídas do sistema e as saídas estimadas. A matriz  $K_e$  corresponde à matriz de ganho do observador e serve como um factor de escala.

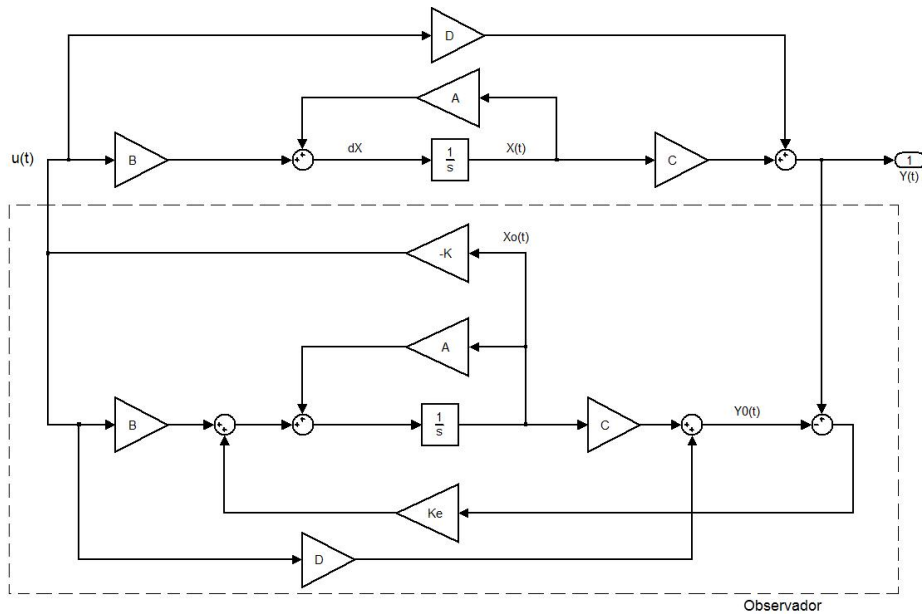


Figura 4.8: Diagrama de blocos de um sistema de controlo com observador de estados

Para obter o erro do observador, define-se o vector da estimativa do erro  $e(t)$  como a diferença entre o vector de estado e os estados estimados:

$$e(t) = x(t) - x_0(t) \quad (4.24)$$

pelo que as equações 4.23a e 4.23b tomam a forma:

$$\dot{e}(t) = (A - K_e C)e(t) \quad (4.25)$$

e a dinâmica do erro é determinada a partir dos valores próprios de  $A - K_e C$ . Se a matriz  $A - K_e C$  for estável, ou seja, se os pólos se encontrarem no semi-plano

complexo esquerdo, dado um erro inicial  $e(0)$  este convergirá para zero, pelo que os estados estimados são próximos do vector de estados  $x(t)$ . Assim, se o sistema for observável, é possível escolher uma matriz  $K_e$  que faça com que  $A - K_e C$  seja estável [36]. A determinação da matriz de ganho do observador  $K_e$  pode ser obtida da mesma forma que se obtém a matriz de ganho do controlador, adoptando o método de alocação de pólos.

$$|sI - A + CK_e| = (s - \hat{p}_1)(s - \hat{p}_2) \cdots (s - \hat{p}_n) \quad (4.26)$$

Tal como foi referido anteriormente, o efeito da adição de um observador é independente do controlador. De facto, considerando que o sistema é descrito pelas equações 4.14a e 4.14b, e que a acção de controlo é efectuada através de uma retroacção dos estados estimados:

$$u(t) = -Kx_0(t) \quad (4.27)$$

a equação em espaço de estados toma a forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx_0(t) = (A - BK)x(t) + BK(x(t) - x_0(t)) \quad (4.28)$$

pelo que introduzindo a equação 4.24:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BK_e e(t) \quad (4.29)$$

Considerando a equação 4.25 que define a dinâmica do erro e combinando a mesma com a equação 4.29 é obtido:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

O sistema 4.30 descreve a dinâmica de um sistema realimentado a partir dos estados estimados do observador. Pelo que a equação característica do sistema toma a forma:

$$\begin{vmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + K_e C \end{vmatrix} = 0 \quad (4.31)$$

ou

$$|sI - A + BK| |sI - A + K_e C| = 0 \quad (4.32)$$

verificando-se a possibilidade do dimensionamento do controlador em separado do observador, devendo apenas garantir-se que a resposta do observador é bastante mais rápida do que a do sistema.

### 4.3 Modelação do sistema com aplicação de um AMD

A introdução de um AMD no sistema implica a consideração de mais uma equação de movimento relativo ao mesmo. Assim, considerando que o dispositivo de controlo se situa num determinado grau de liberdade da estrutura, definido pelo vector  $e_c$ , o deslocamento da estrutura nesse mesmo ponto de aplicação será  $Z_1(x_0, t) = e_c^t Z_1(t)$ .

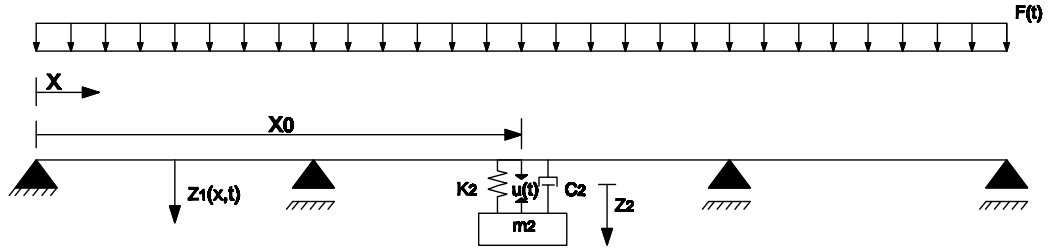


Figura 4.9: Definição do modelo numérico com AMD num ponto genérico  $x_o$

Assim, recorrendo à segunda lei de Newton, as equações de movimento da estrutura e do AMD podem ser descritas por:

$$M_1 \ddot{Z}_1 + C_1 \dot{Z}_1 + K_1 Z_1 = F(t) + e_c [K_2(Z_2 - Z_1(x_0, t)) + C_2(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1(x_0, t)) + u(t)] \quad (4.33a)$$

$$M_2 \ddot{Z}_2 + K_2(Z_2 - Z_1(x_0, t)) + C_2(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1(x_0, t)) = -u(t) \quad (4.33b)$$

reescrevendo o sistema, substituindo  $Z_1(x_0, t)$  e escrevendo na forma matricial resulta:

$$M_s \ddot{Z} + C_s \dot{Z} + K_s Z = F(t) + F_c u(t) \quad (4.34)$$

onde:

$$M_s = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \quad C_s = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 e_c e_c^t & -C_2 e_c \\ -C_2 e_c & C_2 \end{bmatrix}$$

$$K_s = \begin{bmatrix} K_1 + k_2 e_c e_c^t & -K_2 e_c \\ -K_2 e_c & K_2 \end{bmatrix} \quad F(t) = \begin{bmatrix} F_o \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad F_c = \begin{bmatrix} e_c \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para definir o sistema em termos de equações modais é necessário efectuar as operações de transformação em coordenadas generalizadas:

$$M_n \ddot{q} + C_n \dot{q} + K_n q = F_n(t) + F_{c,n} u(t) \quad (4.35)$$

onde:

$$M_n = \phi^t M_s \phi \quad C_n = \phi^t C_s \phi \quad K_n = \phi^t K_s \phi$$

$$F_n(t) = \int_0^L F(t) \phi(x) \quad F_{c,n} = \phi^t F_c$$

Sendo que é possível escrever o deslocamento da estrutura em coordenadas geométricas através de:

$$z(t) = \phi(x)q(t) \quad (4.36)$$

#### 4.4 Representação em espaço de estados

A representação em espaço de estados tem como objectivo reescrever as equações do movimento, num maior número de equações diferenciais mas com um menor grau. Assim, reescrevendo a equação 4.35 em ordem ao termo das acelerações:

$$\ddot{q} = -M_n^{-1}C_n\dot{q} - M_n^{-1}K_nq + M_n^{-1}F_n(t) + M_n^{-1}F_{c,n}u(t) \quad (4.37)$$

É possível escrever a equação em espaço de estados, definindo  $x(t)$  como as variáveis de estados através de:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_{ex}f(t) + Bu(t) \quad x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

onde  $A$  é a matriz de estados,  $B_{ex}$  a matriz de entrada correspondente à excitação,  $B$  a matriz de entrada correspondente à acção de controlo, podendo ser definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_n^{-1}K_n & -M_n^{-1}C_n \end{bmatrix} \quad B_{ex} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_n^{-1}F_n(t) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M_n^{-1}F_{c,n} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Assim, o vector de estado  $x(t)$  é constituído pelas coordenadas generalizadas e as suas primeiras derivadas. O vector de saída  $y(t)$  inclui as variáveis medidas pelos sensores instalados na estrutura e, escrevendo a equação 4.35 em ordem do mesmo, define-se:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4.40)$$

onde  $C$  e  $D$  são, respectivamente, a matriz de saída e matriz de transmissão directa. Uma vez calculados os parâmetros da equação 4.37 e efectuada a transformação em espaço de estados, a resolução numérica pode ser levada a cabo através de um dos métodos conhecidos.

## Capítulo 5

# Implementação dos sistemas de controlo

Da análise dos valores máximos das acelerações calculados anteriormente, para as diferentes situações de ressonância consideradas, conclui-se que se atingem níveis de vibração excessivos, tanto para a direcção vertical como lateral. Assim, para as duas situações é necessária a aplicação de um sistema de controlo capaz de reduzir os valores máximos.

### 5.1 Controlo de vibrações com TMD's

Esta secção tem como objectivo a atenuação das vibrações decorrentes da acção pedonal, recorrendo a uma solução de controlo passiva, utilizando amortecedores de massa sintonizada. Esta solução foi dimensionada para as duas direcções estudadas, diferenciando-se assim a aplicação de TMD's na direcção vertical e lateral.

#### 5.1.1 Aplicação de TMD's na direcção vertical

Na direcção vertical apenas ocorrem problemas no primeiro modo de vibração, pelo que o dimensionamento do TMD foi efectuado para a situação mais gravosa, Modo 5, Classe I. Assim, o dimensionamento do TMD passa por quantificar os valores da massa adicional, rigidez e amortecimento, de modo a que a resposta máxima da estrutura, quando sujeita às acções dinâmicas, não exceda os limites estabelecidos.

Tendo em conta a solução mais económica, a posição do dispositivo de controlo deverá ser tal que corresponda a um máximo da configuração do modo de vibração a controlar. Assim, analisando o modo de vibração em questão, o TMD deverá localizar-se no ponto B da figura 5.1 com uma componente modal de 0.10558.

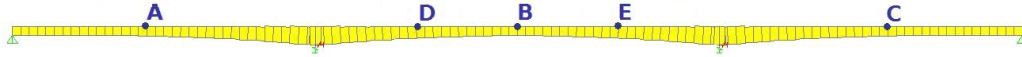


Figura 5.1: Pontos de aplicação de TMD's

A massa modal do primeiro modo de vibração, normalizado de forma a que a configuração do mesmo tenha uma componente modal unitária no ponto de aplicação, é  $m_1 = 89.709$  ton e a respectiva rigidez modal  $K_1 = 8930.945$  KN/m.

Conhecendo as características modais, seguindo o processo de dimensionamento descrito no capítulo 4 e assumindo que o valor da aceleração máxima a atingir é  $1 \text{ m/s}^2$ , através da equação 4.11 calcula-se o correspondente deslocamento máximo:

$$X_1 = \frac{a_{max}}{\omega_n^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 1.588)^2} = 1.005 \times 10^{-2} \text{m} \quad (5.1)$$

Para o cálculo do deslocamento estático é necessário conhecer a amplitude da solicitação. Assim, através da tabela 3.14 e efectuando a operação de transformação para coordenadas modais  $F_0 = \int_0^L F(t)\psi(x)dx$  por meio das funções polinomiais do 4º grau definidas no anexo D, resulta:

$$X_{1,est} = \frac{F_0}{K_1} = \frac{78.0102 \cdot 6.602 \cdot 1 \times 10^{-3}}{0.10558 \cdot 8930.945} = 5.462 \times 10^{-4} \text{m} \quad (5.2)$$

pelo que o factor de amplificação máximo é:

$$\frac{X_1}{X_{1,est}} = 18.389 \quad (5.3)$$

Conhecendo o factor de amplificação que se pretende atingir e tendo em conta a equação 4.8, referente ao factor de amplificação do TMD, é possível calcular o valor da massa adicional. Definido o valor de  $\mu$ , os parâmetros óptimos do TMD podem ser calculados resultando:

Tabela 5.1: Parâmetros óptimos de um TMD sintonizado para o modo 5

modo	$m_2$ [ton]	$k_2$ [KN/m]	$c_2$ [KN.s/m]
5	0.532	52.353	0.493

A resposta da estrutura dotada de um TMD obteve-se através do programa Sap2000. Assim, para simular o comportamento da estrutura com o dispositivo de controlo, definiu-se uma massa pontual ligada à estrutura através de um “*Linear NLink*”, com as propriedades da tabela 5.1. Na figura 5.2 é apresentada a resposta da estrutura em termos de acelerações para o carregamento em ressonância com o modo de vibração que se pretende controlar. É possível concluir que esta



solução reduziu os níveis de aceleração em 72 %, respeitando assim os limites de acelerações impostos.

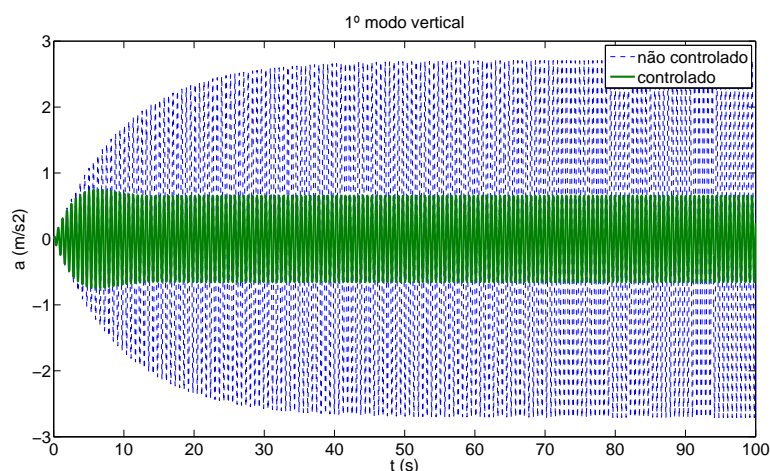


Figura 5.2: Aceleração vertical no ponto B com TMD sintonizado para o 1º modo vertical

### 5.1.2 Aplicação de TMD's na direcção lateral

Um TMD apenas é efectivo numa pequena banda de frequências, pelo que serão precisos tantos TMD's quantos os modos que se pretendem controlar. Assim, para o controlo dos modos de vibração na direcção lateral, que não respeitam os limites impostos, terão que se dimensionar vários TMD's, uma vez que se pretende controlar os três primeiros modos laterais. Tal como foi efectuado para o modo vertical, a identificação da posição óptima do TMD, ou seja, a posição que leva à solução mais económica, corresponde à posição onde a componente do modo de vibração tem maior valor. Para os primeiros três modos laterais a posição óptima corresponde respectivamente aos pontos B, A e C da figura 5.1 com componentes modais de 0.11918, 0.10177 e 0.09784 respectivamente.

O cálculo da massa modal, com uma componente unitária no respectivo ponto de aplicação e o factor de amplificação para que a aceleração máxima seja inferior a  $0.1 \text{ m/s}^2$ , podem ser determinadas resultando:

Tabela 5.2: Propriedades da estrutura para aplicação de TMD's nos 3 primeiros modos laterais

Modo	$M_1$ [ton]	$K_1$ [KN/m]	$X_1$ [m]	$F_0$ [KN]	$X_{1,est}$ [m]	$X_1/X_{1,est}$
1	70.403	752.131	0.009	0.577	0.0008	12.206
2	96.552	1980.770	0.005	0.678	0.0003	14.251
3	104.464	2428.681	0.004	0.743	0.0003	14.062

As propriedades óptimas do sistema de controlo são obtidas através das equações 4.7, 4.8 e 4.9:

Tabela 5.3: Propriedades dos diferentes TMD's sintonizados para os primeiros 3 modos de vibração

Modo	$\mu$	$q_{e,opt}$	$\xi_{2,opt}$	$m_2$ [ton]	$k_2$ [KN/m]	$c_2$ [KN.s/m]
1	0.014	0.987	0.070	0.952	9.896	0.428
2	0.010	0.990	0.060	0.956	19.221	0.515
3	0.010	0.989	0.061	1.062	24.194	0.617

A resposta da estrutura obtida no programa Sap2000, é apresentada na figura 5.3, para os diferentes carregamentos em ressonância com o respectivo modo de vibração. Conclui-se que esta solução reduziu significativamente a aceleração máxima da estrutura, verificando os valores regulamentados.

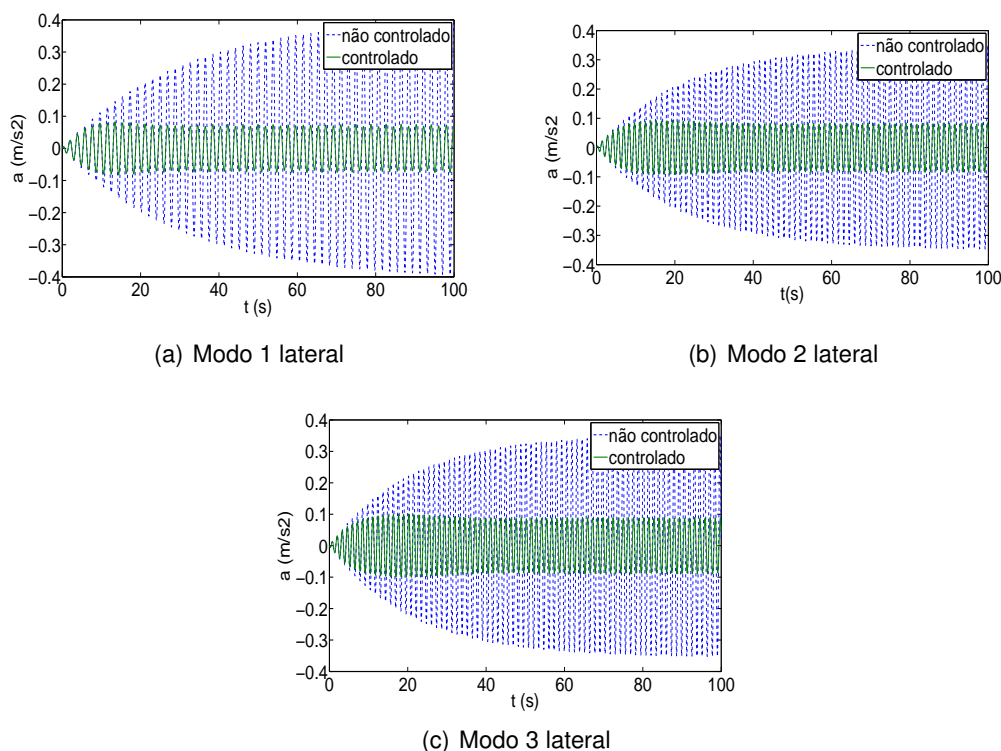


Figura 5.3: Acelerações máximas da estrutura para os diferentes carregamentos com TMD

Uma vez verificados os limites testou-se a influência de um TMD sintonizado para um determinado modo de vibração nos restantes modos. Verificou-se que um TMD sintonizado para o segundo modo de vibração atenua as vibrações no

terceiro modo e vice-versa. De facto, tal como foi referido anteriormente, um TMD é efectivo não apenas numa única frequência mas numa banda de frequências. Tendo em conta que o segundo e terceiro modo apresentam frequências de 0.721 Hz e 0.767 Hz respectivamente, apenas será necessário a aplicação de um TMD sintonizado para o segundo ou para o terceiro modo de vibração.

Da tabela 5.3 verifica-se que o valor da massa adicional é na ordem de 1 tonelada, pelo que, por razões geométricas e estruturais, poderá não ser a melhor solução. Assim, decidiu-se utilizar um maior número de TMD's, mas de menor massa, de maneira a produzir os mesmos resultados.

Para o controlo do primeiro modo de vibração lateral decidiu-se utilizar 3 TMD's equivalentes nas posições B, D e E da figura 5.1, enquanto que para o controlo do segundo e terceiro modo a utilização de 2 TMD's equivalentes, sintonizados para o segundo modo, nas posições A e C da mesma figura. Seguidamente é necessário calcular a massa de cada TMD, dada pela multiplicação da massa modal, pressupondo uma componente unitária no ponto de aplicação do TMD, pelo valor de  $\mu$  definido anteriormente no quadro 5.3.

Tabela 5.4: Massa modal e factores de participação de TMD's equivalentes  
2 TMD's sintonizados para o 2º modo de vibração

$M_1$ [ton]	0.955	$\beta_1$	0.508
$M_2$ [ton]	0.987	$\beta_2$	0.492
3TMD's sintonizados para o 1º modo de vibração			
$M_1$ [ton]	1.362	$\beta_1$	0.292
$M_2$ [ton]	1.364	$\beta_2$	0.291
$M_3$ [ton]	0.951	$\beta_3$	0.417

Seguindo a metodologia apresentada no capítulo 4 é necessário atribuir coeficientes aos TMD's de acordo com a contribuição que se quer que cada um dê à resposta final. Assim, admitindo que se quer que as massas dos TMD's sejam iguais e que a soma dos referidos coeficientes de participação é igual à unidade, teremos um sistema de  $n$  incógnitas com  $n$  equações.

As restantes características dos TMD's são calculadas com base nos parâmetros óptimos da frequência e amortecimento constantes da tabela 5.3 resultando:

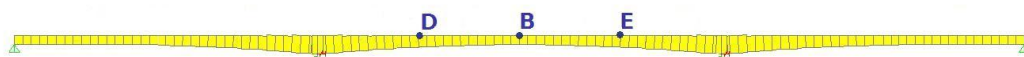
Tabela 5.5: Parâmetros óptimos dos TMD's equivalentes

modo	$m_2$ [ton]	$k_2$ [KN/m]	$c_2$ [KN.s/m]
1	0.397	4.130	0.178
2	0.485	9.770	0.261

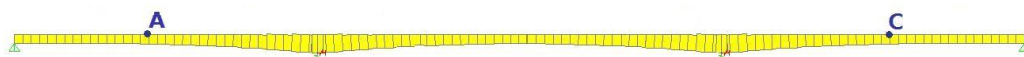
Pelo que a resposta da estrutura perante os carregamentos pedonais, controlada e não controlada, obtida no programa Sap2000, é apresentada na tabela 5.6, reduzindo significativamente as acelerações, necessitando para tal a aplicação de 5 TMD's para o controlo de vibrações na direcção lateral e 1 na direcção vertical, nas posições indicadas nas figuras 5.4:

Tabela 5.6: Valores de pico para as respostas controlada e não controlada

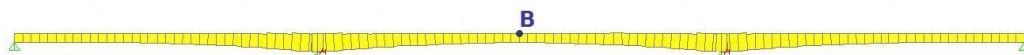
modo	Aceleração máxima [m/s <sup>2</sup> ]		Redução (%)
	Sem Controlo	Com controlo	
1	0.407	0.083	79.661
2	0.350	0.093	73.408
3	0.356	0.087	75.679
5	2.740	0.747	72.748



(a) Modo 1 lateral  $f_1 = 0.520$  Hz



(b) Modo 2 e modo 3 lateral  $f_2 = 0.721$  Hz e  $f_3 = 0.767$  Hz



(c) Modo 5 vertical  $f_5 = 1.588$  Hz

Figura 5.4: Solução final de controlo passivo por meio de TMD's

## 5.2 Controlo de vibrações com um AMD

Uma vez que os limites de aceleração na direcção vertical apenas são excedidos no primeiro modo de vibração, esta solução só será implementada na direcção lateral, onde se pretende controlar os primeiros 3 modos de vibração.

O sistema de controlo activo adoptado consiste em adaptar um TMD, dotado de um actuador, de maneira a que os limites de aceleração sejam verificados. O objectivo é controlar o primeiro modo de vibração lateral, tanto passivamente como activamente, e os modos laterais superiores apenas por meio de um actuador

(hidráulico, electromagnético, pneumático, piezoeléctrico, entre outros). Assim, esta solução requer que o AMD seja posicionado de maneira a que todos os modos sejam controláveis, pelo que o mesmo terá de ser posicionado de tal forma que a componente dos modos de vibração seja a maior possível.

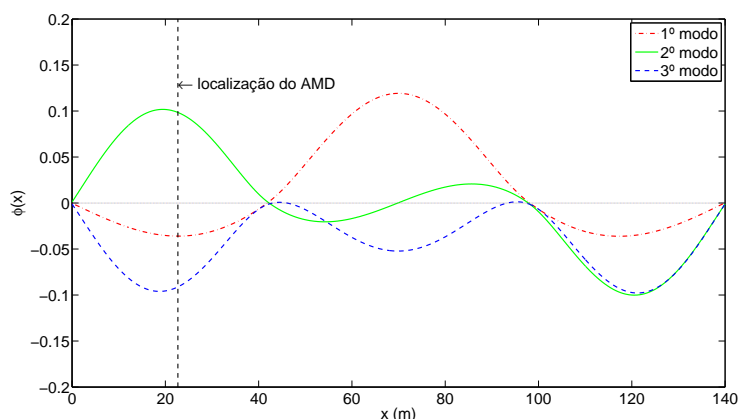


Figura 5.5: Configuração dos primeiros 3 modos de vibração laterais

A posição do TMD escolhida foi  $x = 22.7$  m, pois é o ponto onde se espera ter uma maior participação em todos os modos, resultando numa menor massa ao nível do TMD adicionado. De facto, fixando a massa adicional em 400 kg, e calculando o coeficiente de amortecimento de um TMD na posição referida, sintonizado para cada um dos 3 modos, seriam obtidos valores de  $\xi_1 = 1.4$  %,  $\xi_2 = 3.8$  % e  $\xi_3 = 3.5$  %.

### 5.2.1 Representação do sistema em Espaço de Estados

Os valores de massa, rigidez e amortecimento do sistema de controlo foram calculados sintonizando um TMD para o primeiro modo de vibração de maneira a controlar o sistema passivamente para 60 % da solicitação e o restante activamente, resultando no valor da massa adicional referida anteriormente. Com esta solução é possível tirar partido do sistema activo e passivo de maneira a controlar o primeiro modo de vibração, conseguindo com isso uma menor massa no sistema de controlo.

Tabela 5.7: Propriedades do TMD

$m_2$ (Ton)	$k_2$ (KN/m)	$c_2$ (KN.s/m)
0.4	4.269	0.037

A partir da equação 4.35 conclui-se que o comportamento da estrutura pode ser determinado através do seguinte vector de estado em termos de coordenadas modais:

$$\mathbf{x}(t) = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_c \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_c]^T \quad (5.4)$$

O vector de saída  $\mathbf{y}(t)$  é constituído pelas variáveis medidas pelos sensores instalados na estrutura:

$$\mathbf{y}(t) = [\ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2 \ \ddot{q}_3 \ \ddot{q}_c]^T \quad (5.5)$$

e a única entrada do sistema será a força de controlo a aplicar à estrutura:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_c(t) \quad (5.6)$$

Atendendo à equação 4.37 é possível representar o movimento da estrutura em relação às variáveis de  $\mathbf{y}(t)$ . Assim, preenchendo a matriz  $\mathbf{A}$  e a matriz  $\mathbf{B}$  conforme as equações 4.39 com os respectivos valores definidos no anexo C, resulta:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10.689 & -0.006 & -0.006 & 0.006 & -0.065 & -0.5 \times 10^{-4} & -0.5 \times 10^{-4} & 0.5 \times 10^{-4} \\ -0.041 & -20.558 & -0.041 & 0.041 & -0.4 \times 10^{-3} & -0.091 & -0.4 \times 10^{-3} & 0.4 \times 10^{-3} \\ -0.036 & -0.035 & -23.284 & 0.036 & -0.3 \times 10^{-3} & -0.3 \times 10^{-3} & -0.097 & 0.3 \times 10^{-3} \\ 10.672 & 10.672 & 10.672 & -10.672 & 0.091 & 0.091 & 0.091 & -0.091 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{B} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1.292 \times 10^{-3} \ 9.687 \times 10^{-3} \ 8.305 \times 10^{-3} \ -2.5]^T \quad (5.8)$$

Tendo em conta que o vector de saída é composto pelas variáveis de  $\mathbf{y}(t)$ , os valores que preenchem a matriz de saída  $\mathbf{C}$  e a matriz de transmissão directa  $\mathbf{D}$  são:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -10.689 & -0.006 & -0.006 & 0.006 & -0.065 & -0.5 \times 10^{-4} & -0.5 \times 10^{-4} & 0.5 \times 10^{-4} \\ -0.041 & -20.558 & -0.041 & 0.041 & -0.4 \times 10^{-3} & -0.091 & -0.4 \times 10^{-3} & 0.4 \times 10^{-3} \\ -0.036 & -0.035 & -23.284 & 0.036 & -0.3 \times 10^{-3} & -0.3 \times 10^{-3} & -0.097 & 0.3 \times 10^{-3} \\ 10.672 & 10.672 & 10.672 & -10.672 & 0.091 & 0.091 & 0.091 & -0.091 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{D} = [1.292 \times 10^{-3} \ 9.687 \times 10^{-3} \ 8.305 \times 10^{-3} \ -2.5]^T \quad (5.10)$$

## 5.2.2 Dimensionamento do Controlador

O controlador foi dimensionado com base em especificações dinâmicas que permitem caracterizar quantitativamente a resposta da estrutura. O processo adoptado teve por base o tempo de estabelecimento  $t_s$  quando são impostos deslocamentos iniciais. O tempo de estabelecimento corresponde ao intervalo de

tempo que a resposta da estrutura leva até não ultrapassar um valor específico em torno da posição de equilíbrio, tendo sido adoptado um valor de 5 % em torno da mesma. Assim, o deslocamento inicial considerado foi:

$$\mathbf{x}(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.11)$$

que corresponde a utilizar um deslocamento inicial igual à unidade nos 3 modos de vibração. O tempo de estabelecimento definido foi de  $t_s = 20$  s que, para o caso da resposta da estrutura sem a acção de controlo, corresponde ao intervalo de tempo que a mesma leva a exceder os limites de aceleração definidos.

Assim, para efeitos de dimensionamento, admitindo que todas as variáveis de estado são mensuráveis, a matriz  $C$  é igual à identidade e a equação de estado toma a forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Para avaliar o comportamento da estrutura, tendo por base a sua representação em espaço de estados, foi realizado um modelo em SIMULINK conforme a figura 5.6.

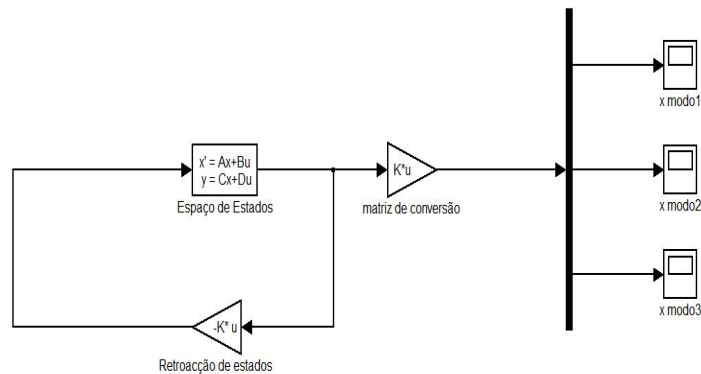


Figura 5.6: Modelo em SIMULINK para dimensionamento do controlador

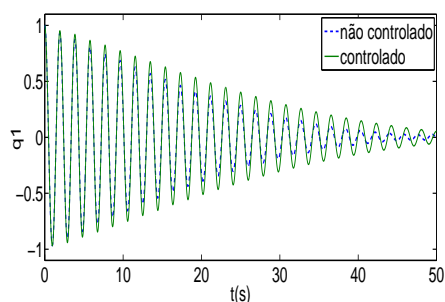
O dimensionamento do controlador teve por base a estratégia de alocação de pólos. Assim, o procedimento passa por mudar o posicionamento dos pólos para que as especificações sejam respeitadas. A estratégia adoptada consiste em alterar o coeficiente de amortecimento de cada modo e verificar a eficiência do mesmo no controlo da resposta.

**1º caso**

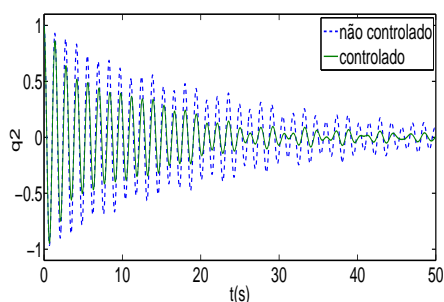
Para diminuir o tempo de estabelecimento aumentou-se o coeficiente de amortecimento do segundo e terceiro modo para 2 %, mantendo-se o mesmo amortecimento no primeiro modo e no AMD e mantendo-se igualmente as frequências próprias do sistema. Os pólos do sistema em malha fechada foram obtidos por meio da equação 4.19, resultando:

Tabela 5.8: Pólos do sistema em malha aberta e em malha fechada (1º caso)

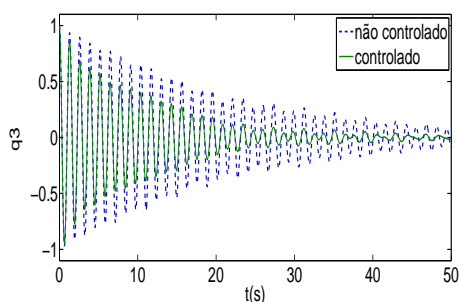
número	Malha aberta	Malha fechada (polos1)
1	$-0.039 + 3.23j$	$-0.039 + 3.23j$
2	$-0.039 - 3.23j$	$-0.039 - 3.23j$
3	$-0.039 + 3.3j$	$-0.039 + 3.3j$
4	$-0.039 - 3.3j$	$-0.039 - 3.3j$
5	$-0.046 + 4.54j$	$-0.091 + 4.54j$
6	$-0.045 - 4.54j$	$0.091 - 4.54j$
7	$-0.049 + 4.83j$	$-0.097 + 4.83j$
8	$-0.049 - 4.83j$	$-0.097 - 4.83j$



(a) 1º modo



(b) 2º modo



(c) 3º modo

Figura 5.7: Comparação entre deslocamentos do sistema não controlado e controlado (caso 1)



A determinação da matriz de ganho do controlador pode ser feita através da função *place* do programa MATLAB, que retorna a referida matriz a partir das matrizes  $A$ ,  $B$  e dos pólos pretendidos.

$$K = place(A, B, polos1) = \begin{bmatrix} -0.339 & -2.266 & 6.114 & -0.021 & 0.0323 & 4.767 & 5.862 & -0.036 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Como se pode observar na figura 5.7 o tempo de estabelecimento é superior ao definido, ultrapassando o valor de 5 % e, apesar de nos modos 2 e 3 ter atenuado as respostas, no 1º modo a resposta é amplificada. Assim, conclui-se que a acção de controlo não é suficiente para cumprir as especificações definidas.

## 2º caso

Tendo em conta que no caso anterior o sistema não verificou as condições, decidiu-se aumentar o coeficiente de amortecimento para 4 % no primeiro modo, e em 4 % no segundo e terceiro modo, mantendo-se as frequências próprias do sistema em malha aberta.

Tabela 5.9: Pólos do sistema em malha aberta e em malha fechada (2º caso)

número	Malha aberta	Malha fechada(polos2)
1	$-0.039 + 3.23j$	$-0.129 + 3.227j$
2	$-0.039 - 3.23j$	$-0.129 - 3.227j$
3	$-0.039 + 3.3j$	$-0.132 + 3.297j$
4	$-0.039 - 3.3j$	$-0.132 - 3.297j$
5	$-0.046 + 4.54j$	$-0.182 + 4.536j$
6	$-0.046 - 4.54j$	$-0.182 - 4.536j$
7	$-0.049 + 4.83j$	$-0.193 + 4.826j$
8	$-0.049 - 4.83j$	$-0.193 - 4.826j$

Recorrendo à função *place* do MATLAB determinou-se o ganho do controlador para este caso:

$$K = \begin{bmatrix} 29.197 & -16.296 & 57.784 & -0.019 & 2.365 & 15.240 & 16.101 & -0.257 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Da figura 5.8 verifica-se que o segundo e terceiro modo obedecem às especificações definidas. No entanto, o primeiro modo, apesar de ter atenuado a resposta, não verifica os critérios.

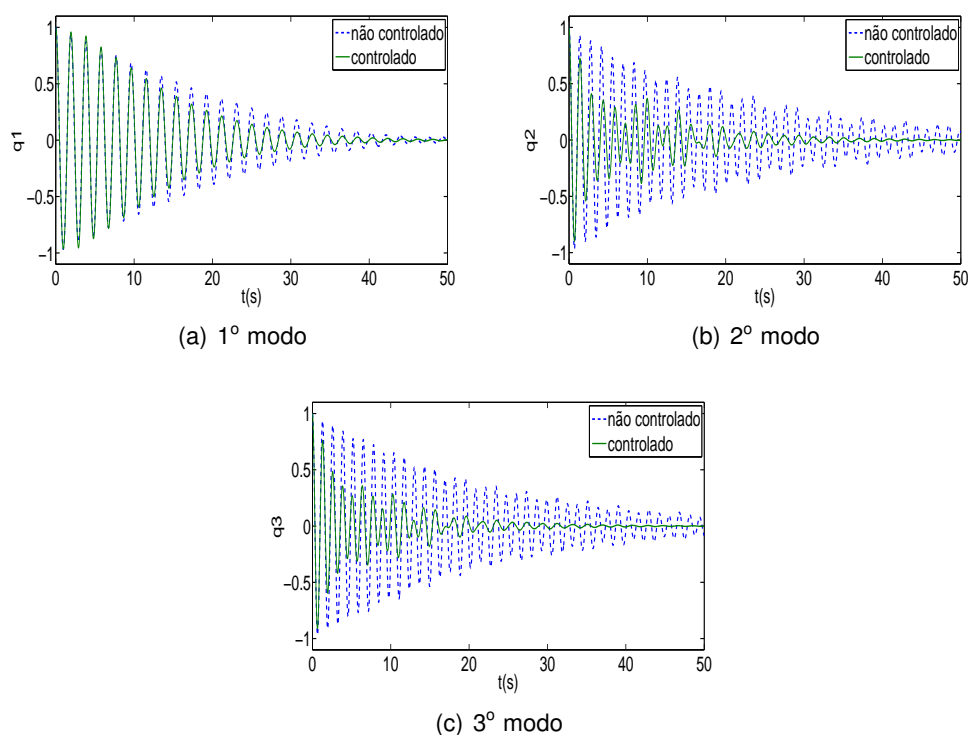


Figura 5.8: Comparação entre deslocamentos do sistema não controlado e controlado (caso 2)

### 3º caso

Neste caso decidiu-se aumentar o coeficiente de amortecimento do primeiro modo para 8 % e em 5 % para o segundo e terceiro modos. Com esta alteração espera-se que a restituição da resposta da estrutura à sua posição de equilíbrio seja mais rápida e que todas as especificações sejam verificadas.

Tabela 5.10: Pólos do sistema em malha aberta e em malha fechada (3º caso)

número	Malha aberta	Malha fechada(polos3)
1	$-0.039 + 3.23j$	$-0.258 + 3.220j$
2	$-0.039 - 3.23j$	$-0.258 - 3.220j$
3	$-0.039 + 3.3j$	$-0.264 + 3.289j$
4	$-0.039 - 3.3j$	$-0.264 - 3.289j$
5	$-0.046 + 4.54j$	$-0.227 + 4.534j$
6	$-0.046 - 4.54j$	$-0.227 - 4.534j$
7	$-0.049 + 4.83j$	$-0.242 + 4.824j$
8	$-0.049 - 4.83j$	$-0.242 - 4.824j$

Recorrendo novamente à função *place* do MATLAB determinou-se o vector de ganho do controlador que possibilita modificar a dinâmica da estrutura:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 161.040 & -12.169 & 116.760 & -0.019 & 12.873 & 22.742 & 16.890 & -0.504 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

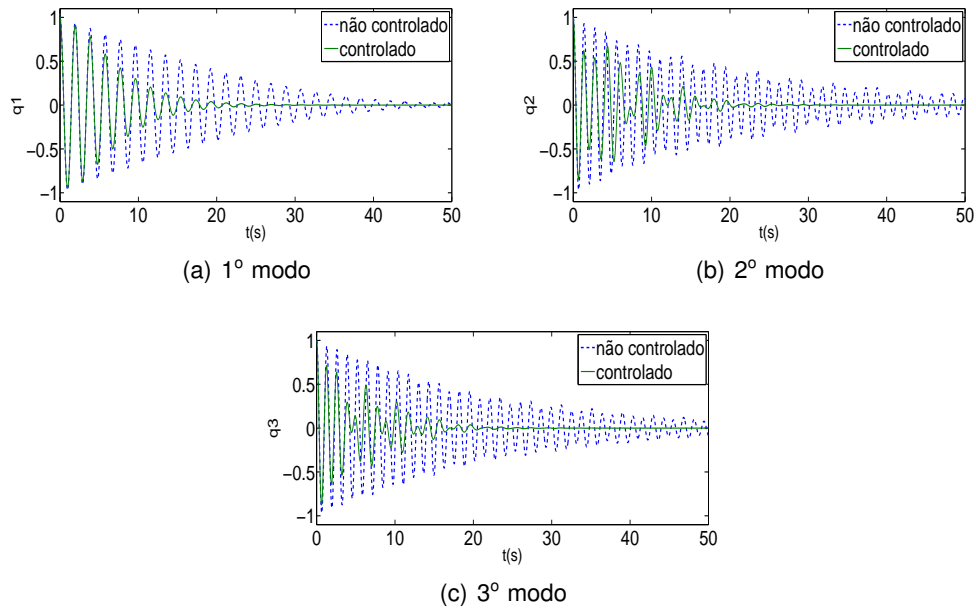


Figura 5.9: Comparação entre deslocamentos do sistema não controlado e controlado (caso 3)

Observa-se, a partir da figura 5.9, que o tempo de estabelecimento é próximo de 20 segundos e que não ultrapassa o valor de 5 % definido. Tendo em conta que o desempenho do sistema é satisfatório, e de forma a não dimensionar um sistema que induza uma acção de controlo maior do que a necessária, decidiu-se não variar novamente os pólos dos sistema.

### 5.2.3 Dimensionamento do Observador de Estados

Uma vez que a estrutura será dotada de sensores que apenas medem acelerações, é necessário introduzir na malha de retroacção um observador de estados que, a partir do vector de saída  $\mathbf{y}(t)$ , estime todos os estados que não estão disponíveis. Assim, dimensionou-se um observador de ordem completa e comparou-se os resultados das estimativas com os valores dos estados, caso os mesmos estivessem disponíveis para a retroacção. Desta forma desenvolveu-se um modelo em SIMULINK, representado na figura 5.10, que permite determinar os estados estimados.

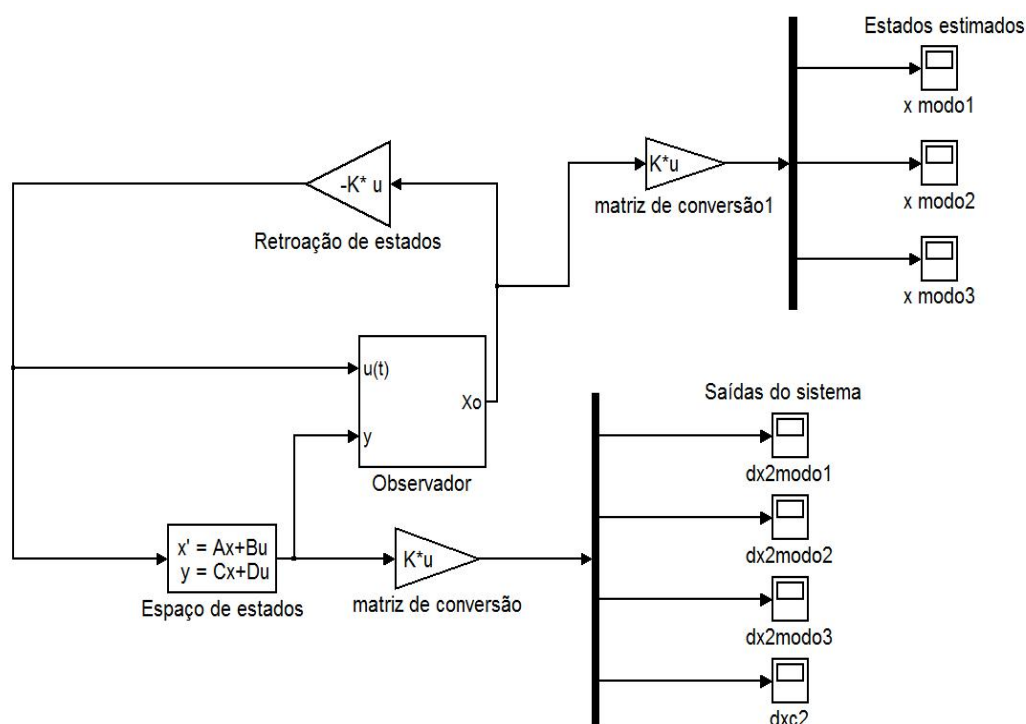


Figura 5.10: Modelo geral em SIMULINK para dimensionamento do observador

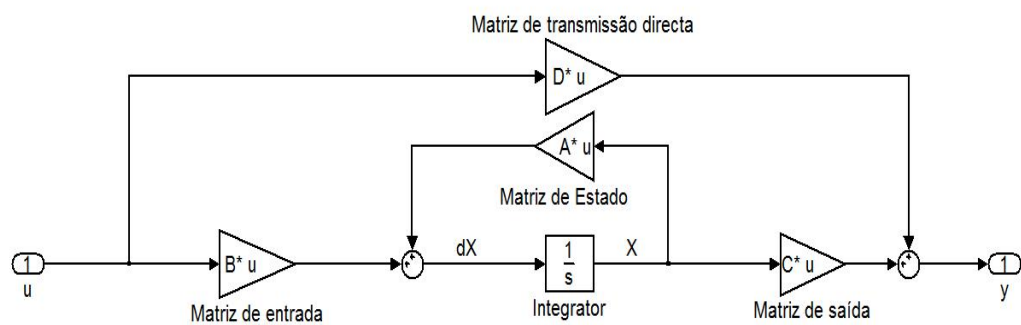


Figura 5.11: Modelo em SIMULINK para representação em espaço de estados

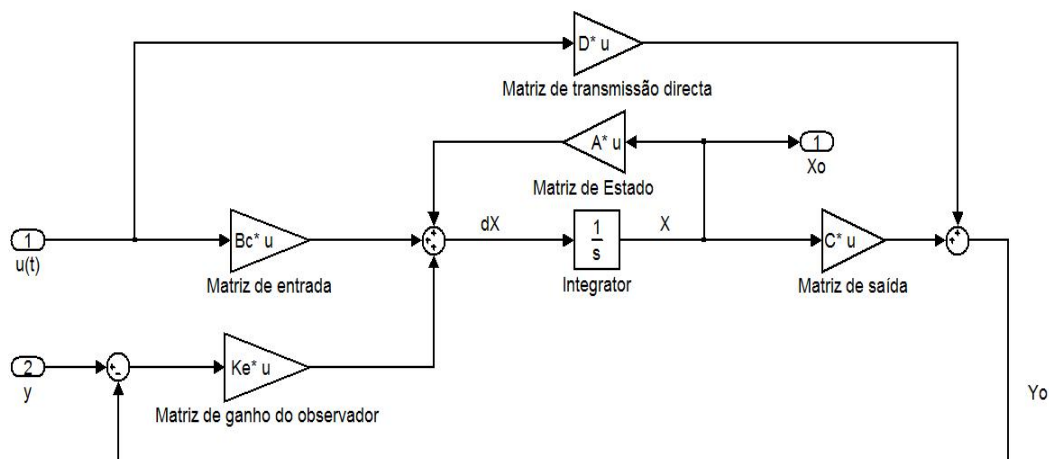


Figura 5.12: Modelo em SIMULINK para dimensionamento do observador

O bloco de espaço de estados permite resolver as equações 4.14a e 4.14b, retornando as variáveis medidas pelos sensores. O vector de entrada corresponde à acção de controlo  $u(t)$  e as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são as calculadas em 5.2.1. As condições iniciais consideradas são as definidas anteriormente, e o ganho do controlador  $K$  é o definido para o 3º caso.

No bloco do observador observa-se que as entradas correspondem às saídas das variáveis medidas e à acção de controlo, e que as saídas do observador correspondem aos estados estimados  $x_0$ .

Seguindo a metodologia apresentada no capítulo 4, quando a retroacção se realiza a partir dos valores estimados, sendo que a dinâmica do erro se caracteriza pela equação 4.25, o problema passa por determinar os valores próprios da matriz  $A - K_e C$ , que permita que a dinâmica do erro se aproxime rapidamente de zero. Assim, tendo em conta os estados obtidos, caso as variáveis estivessem disponíveis para a retroacção (3º caso), efectuou-se um estudo onde se varia a posição dos pólos do observador, com o objectivo de encontrar a matriz de ganho  $K_e$  que permita obter uma dinâmica do erro próxima de zero.

### 1º caso

A primeira aproximação realizada consiste em considerar os pólos do observador iguais aos pólos do controlador do caso 3. Assim, tal como foi realizado para o controlador, através da função *place* do MATLAB é possível determinar o ganho do observador.

$$K_e = place(A^T, C^T, polos3)^T = \begin{bmatrix} 0.043 & 0.035 & 0.023 & 0.100 \\ -0.051 & -0.061 & -0.019 & -0.079 \\ 0.02 & -0.019 & -0.024 & 0.003 \\ -0.048 & 0.048 & -0.001 & -0.001 \\ -1.055 & -0.456 & -0.197 & -0.236 \\ -0.169 & 0.151 & -0.109 & -0.106 \\ -0.282 & -0.211 & 0.462 & -0.016 \\ -1.754 & -0.929 & -0.649 & -0.451 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Na figura 5.13 é apresentada a comparação entre os estados estimados e o valor dos estados para o caso 3, pelo que a sua diferença é elevada, apesar de convergir lentamente para os valores das variáveis de estado.

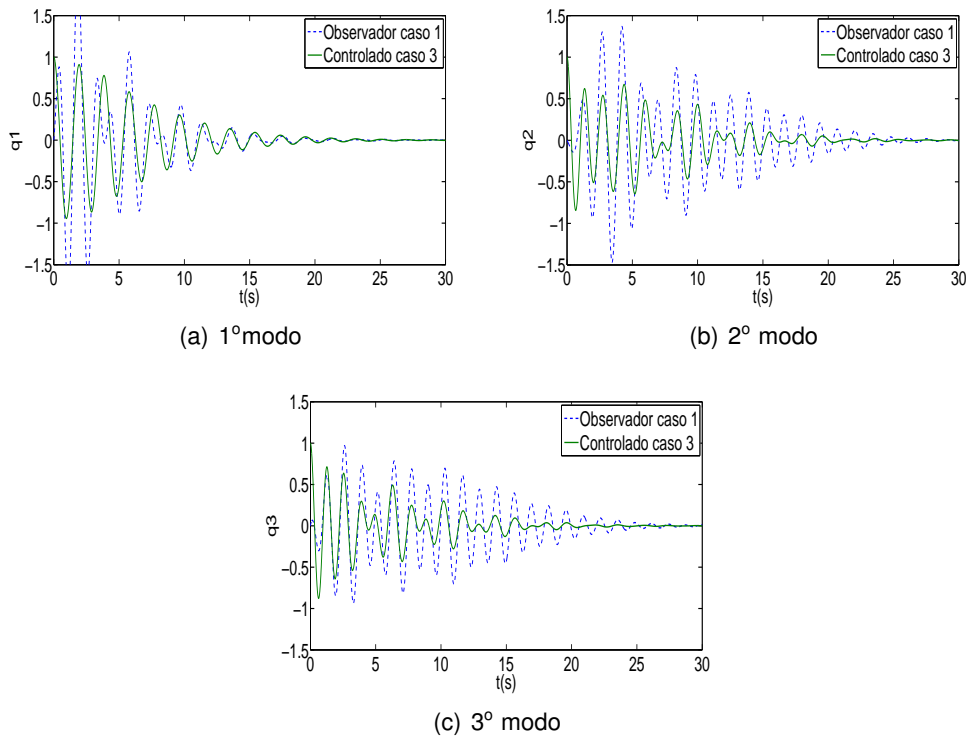


Figura 5.13: Comparação entre valores estimados e os estados simulados (1º caso)

## 2º caso

Para que a dinâmica do observador seja mais rápida, os pólos deverão afastar-se do eixo imaginário, pelo que a diferença pode ser diminuída se for considerado um amortecimento de 100 %. Com esta solução todos os pólos do observador estarão

localizados sobre o eixo real, sendo que o valor considerado foi:

$$polos4 = \begin{bmatrix} -12.920 & -6.460 & -6.60 & -6.60 & -18.160 & -9.080 & -19.320 & -9.660 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$K_e = place(A^T, C^T, polos4)^T = \begin{bmatrix} -2.615 & -0.004 & -0.004 & -0.010 \\ -0.093 & -1.098 & -0.153 & -0.099 \\ -0.029 & -0.138 & -0.948 & -0.033 \\ -1.475 & -0.809 & -0.687 & -1.433 \\ -16.563 & -0.043 & -0.044 & -0.103 \\ -0.635 & -4.278 & -1.039 & -0.669 \\ -0.194 & -0.937 & -3.506 & -0.213 \\ -5.665 & -3.205 & -2.627 & -4.617 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Da figura 5.14 conclui-se que o observador faz uma boa aproximação, pelo que o erro se aproxima de zero de uma forma mais rápida.

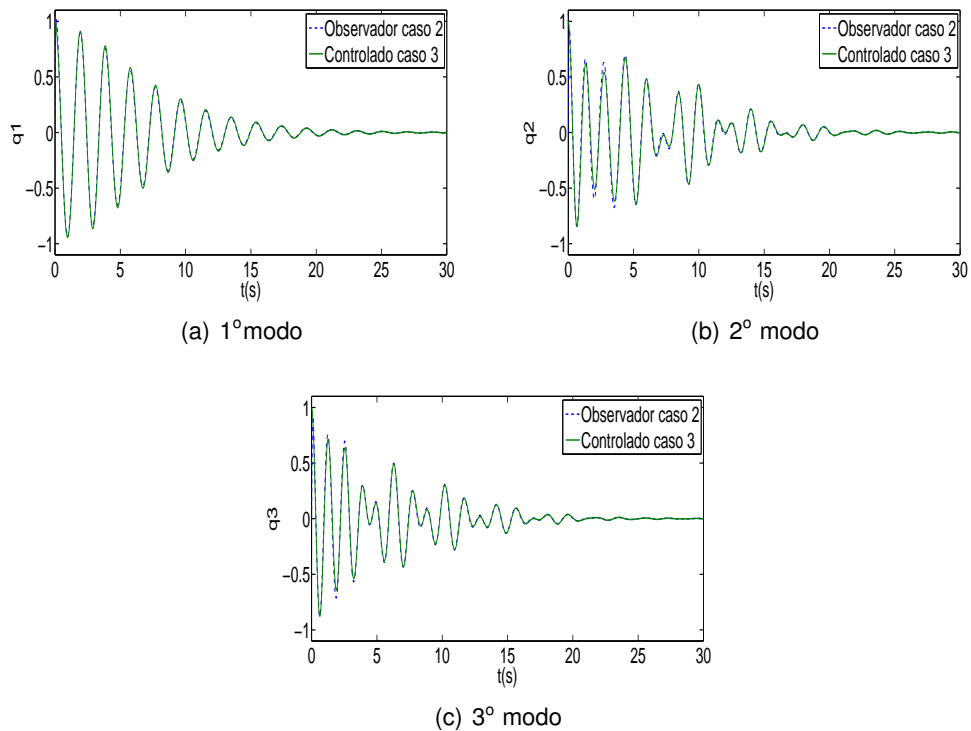


Figura 5.14: Comparação entre valores estimados e os estados simulados (2º caso)

### 5.2.4 Avaliação do comportamento da estrutura para os carregamentos pedonais

As equações do movimento da estrutura com o sistema de controlo activo e com a actuação dos carregamentos pedonais foram determinadas no capítulo 4, pelo que a representação em espaço de estados pode ser efectuada a partir de:

$$\ddot{q} = -M_n^{-1}C_n\dot{q} - M_n^{-1}K_nq + M_n^{-1}F_n(t) + M_n^{-1}F_{c,n}u(t)$$

onde as matrizes  $M_n$ ,  $K_n$ ,  $C_n$ ,  $F_n(t)$  e  $F_{c,n}$  encontram-se definidas no anexo C. Assim, considerando a equação anterior, é possível a sua representação na forma de espaço de estado através de:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_n^{-1}K_n & -M_n^{-1}C_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ M_n^{-1}F_0 \end{bmatrix} f(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ M_n^{-1}F_{c,n} \end{bmatrix} u(t) \quad (5.19)$$

onde  $F_0$  corresponde à amplitude dos carregamentos considerados e  $f(t)$  à respectiva variação temporal da carga. Assim, tendo em conta a lei de controlo definida por:

$$u(t) = -Kx(t)$$

a equação de estado toma a forma:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + B_{ex}f(t) \quad (5.20)$$

A matriz  $K$ , correspondente ao ganho do controlador, foi obtida anteriormente (3º caso) e possibilita aumentar os coeficientes de amortecimento nos 3 modos de vibração mantendo as frequências próprias do sistema. Assim, substituindo os valores das respectivas matrizes na equação 5.20 e desenvolvendo o modelo em SIMULINK conforme a figura 5.15, é possível simular o comportamento da estrutura quando sujeita aos carregamentos pedonais em ressonância com os respectivos modos de vibração.

No bloco (1) representa-se o modelo em espaço de estados, pelo que este terá duas entradas, uma referente à acção de controlo e outra devido ao carregamento. No bloco (2) representa-se o observador de estados que, a partir das medições, é possível estimar o vector de estados. Os ganhos do observador  $K_e$  são os definidos anteriormente (caso 2). Como tal, o observador tem como entradas a acção de controlo  $u(t)$ , o carregamento  $f(t)$  e o vector de saída  $y(t)$ . Assim, as equações que definem a dinâmica do observador são:

$$\dot{x}(t) = Ax_0(t) + Bu(t) + B_{ex}f(t) + K_e(y(t) - y_0(t)) \quad (5.21a)$$

$$y_0(t) = Cx_0(t) + Du(t) + D_{ex}f(t) \quad (5.21b)$$



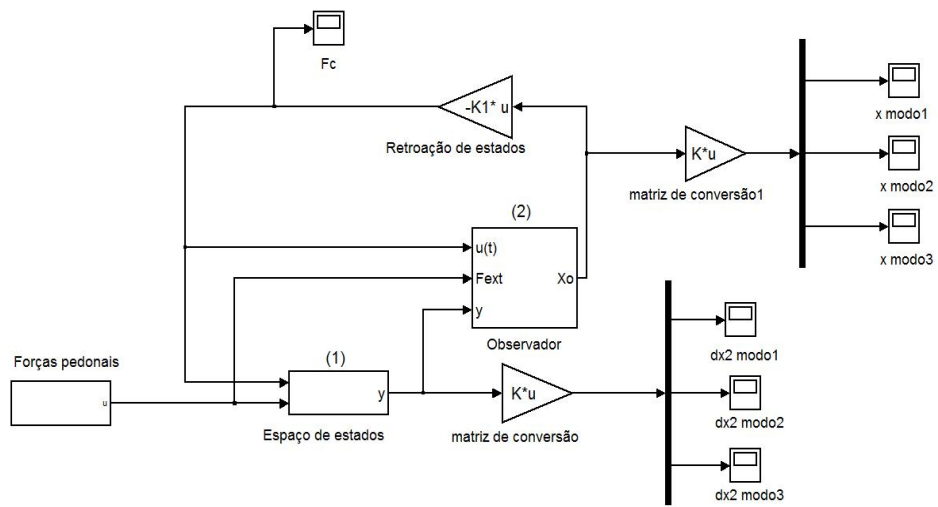


Figura 5.15: Modelo em SIMULINK com carregamentos pedonais

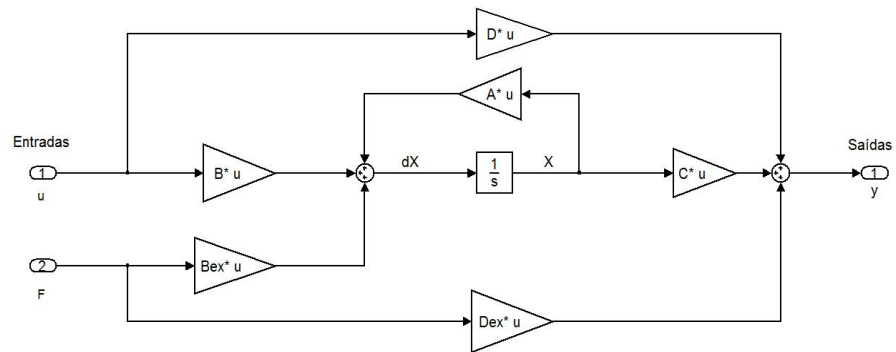


Figura 5.16: Modelo em SIMULINK com carregamentos pedonais, representação em espaço de estados (Bloco 1)

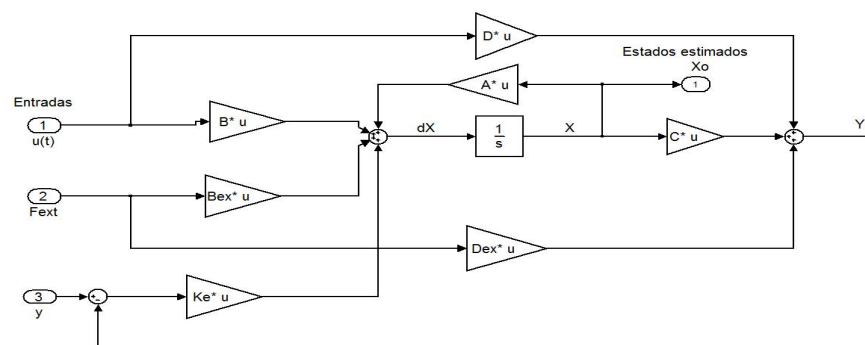


Figura 5.17: Modelo em SIMULINK com carregamentos pedonais, observador de estados (Bloco 2)

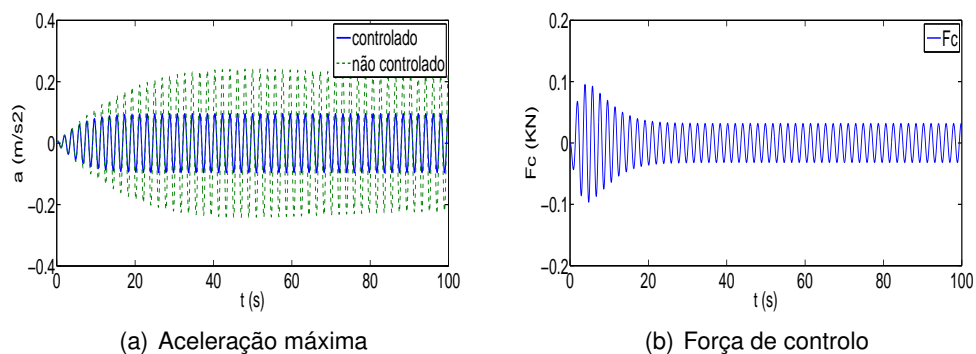


Figura 5.18: Aceleração e força de controlo para o carregamento Modo 1, Classe I

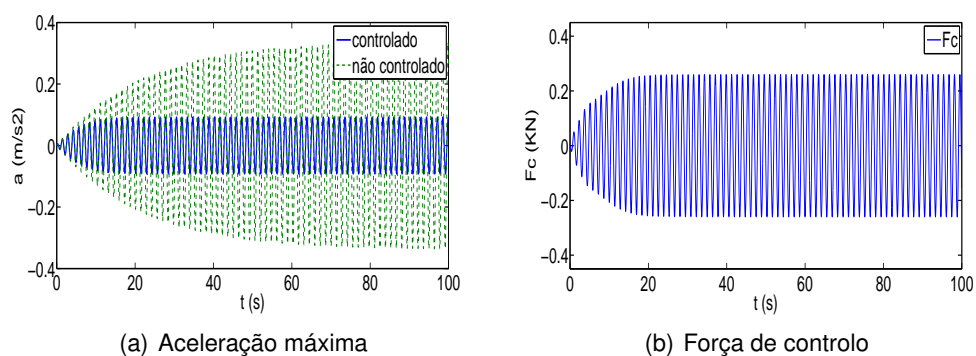


Figura 5.19: Aceleração e força de controlo para o carregamento Modo 2, Classe I

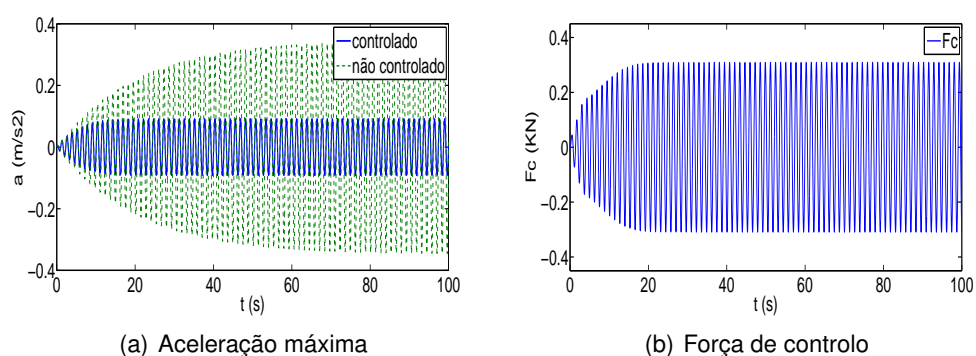


Figura 5.20: Aceleração e força de controlo para o carregamento Modo 3, Classe I

Da análise dos resultados obtidos é possível concluir que o sistema de controlo activo permite reduzir a resposta da estrutura nos 3 casos estudados de maneira a respeitar os limites de acelerações definidos. Quando o sistema se encontra inactivo o controlo é feito passivamente, pelo que, tal como dimensionado, apenas irá atenuar as vibrações no modo para o qual foi sintonizado. Assim é possível verificar que a força de controlo necessária para controlar o sistema é menor no primeiro carregamento. Na tabela 5.11 é apresentado um resumo dos valores máximos obtidos para cada simulação.

Tabela 5.11: Valores máximos de aceleração para os 3 casos considerados

Caso	Sem Controlo	Com AMD inactivo [m/s <sup>2</sup> ]	Com AMD activo [m/s <sup>2</sup> ]
Modo 1, Classe I	0.41	0.24 (−41.5 %)	0.0966 (−76.7 %)
Modo 2, Classe I	0.35	0.35 (0 %)	0.092 (−73.7 %)
Modo 3, Classe I	0.36	0.36 (0 %)	0.0915 (−74.6 %)

O controlo activo possibilitou a redução das acelerações máximas em mais de 73 % em todos os casos estudados. Dos resultados, a força de controlo máxima é 0.096 KN, 0.260 KN e 0.310 KN para os três carregamentos respectivamente. Quando o sistema se encontra inactivo,  $u(t) = 0$ , é possível reduzir as vibrações no primeiro modo de vibração em 41.5 %. No entanto, nessa situação, não será produzido nenhum efeito nos restantes modos. O deslocamento máximo registado pelo dispositivo de controlo foi de 0.343 m, verificando-se a disponibilidade da estrutura para alojar este tipo de solução.



## Capítulo 6

# Medições “in Situ”

É objectivo deste capítulo a identificação das características dinâmicas da estrutura em estudo. Uma vez que o desenvolvimento deste trabalho foi efectuado em paralelo com a construção da ponte pedonal, a realização de ensaios para a identificação das frequências naturais da estrutura e do seu amortecimento, foi possível de efectuar após a sua inauguração. Com este estudo foi possível verificar o modelo adoptado nos sistemas de controlo, uma vez que os mesmos dependem das características dinâmicas da ponte.

### Descrição do equipamento

Os ensaios experimentais foram realizados com recurso ao equipamento MR2002 da *Syscom*, disponível no Departamento de Engenharia Civil. O equipamento é constituído por um sensor de velocidades (figura 6.1(a)) com três direcções ortogonais, ligado a um sistema de aquisição de dados (figura 6.1(b)), o qual regista os resultados das medições.

A duração dos registos para cada ensaio é variável, pois para a sua determinação o equipamento utilizado necessita da definição de 3 parâmetros:

- *Trigger*: 6 mm/s
- *Pre-event time*: 1 s
- *Post-event time*: 12 s

No momento em que os registos ultrapassam o patamar definido de 6 mm/s, as leituras são gravadas a partir de 1 s antes desse momento. Se durante 12 s esse patamar não voltar a ser excedido, o registo é interrompido. Desta forma, a duração dos ensaios correspondem à soma, do “*Pre-event*”, do tempo em que os registo se situam acima do “*Trigger*” e do tempo de “*Post-event*”. A frequência de amostragem foi de 400 Hz.



Figura 6.1: Execução dos ensaios dinâmicos

A localização dos aparelhos foi determinada consoante as componentes dos modos de vibração de maior participação para a resposta da estrutura. Assim, foram utilizados dois aparelhos, cada um colocado a meio de cada vão conforme a figura 6.2.

Com esta solução espera-se conseguir identificar os primeiros 3 modos de vibração na direcção vertical para o sensor 1, e o primeiro e terceiro modos de vibração no caso do sensor 2. Uma vez que o passadiço contém uma chapa de pavimento bastante flexível e capaz de adulterar as medições, decidiu-se colocar o equipamento numa das vigas longitudinais realizando a solicitação na outra viga contrária.

### Caracterização dos ensaios

Os ensaios realizados consistiram em 4 pessoas sincronizadas, localizadas nos pontos referidos na figura 6.2, induzindo uma excitação na estrutura com um salto, registando-se a resposta em regime livre da mesma. Tendo em conta o tipo de ensaio realizado, foi possível identificar as características dinâmicas da estrutura na direcção vertical, negligenciando assim as medições registadas nas restantes direcções.

A título de exemplo dos sinais registados, apresenta-se na figura 6.3 o valor das velocidades dos dois sensores utilizados nas posições 1 e 2 na direcção vertical.

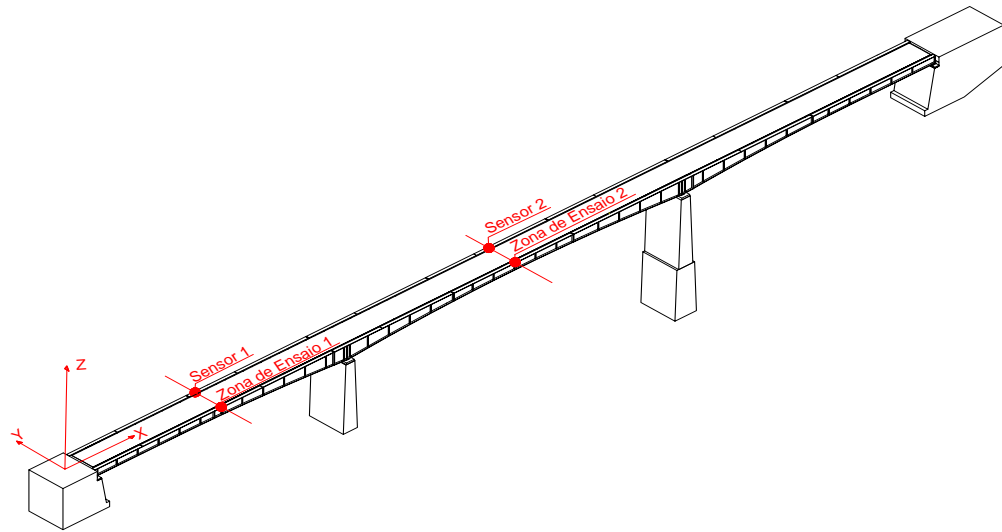


Figura 6.2: Posição sensores

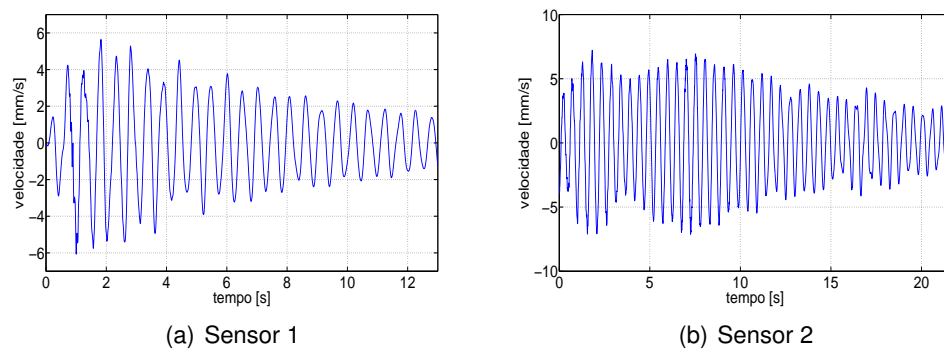


Figura 6.3: Resultados das medições

### Identificação das frequências próprias

A análise dos registos foi realizada através dos softwares *WINCOM* e *VIEW2002* [41], os quais incluem análises no domínio do tempo e da frequência. A identificação das frequências próprias foi realizada através da aplicação da “*Fast Fourier Transform*”, disponibilizada pelo equipamento, com base na resposta obtida, de maneira a obter a resposta da estrutura no domínio da frequência.

Assim, na figura 6.4 é apresentada a *FFT* de dois ensaios registados pelos sensores referidos. Desta forma foi possível identificar no sensor 1 as 3 primeiras frequências na direcção vertical, e no sensor 2 a primeira e terceira frequências.

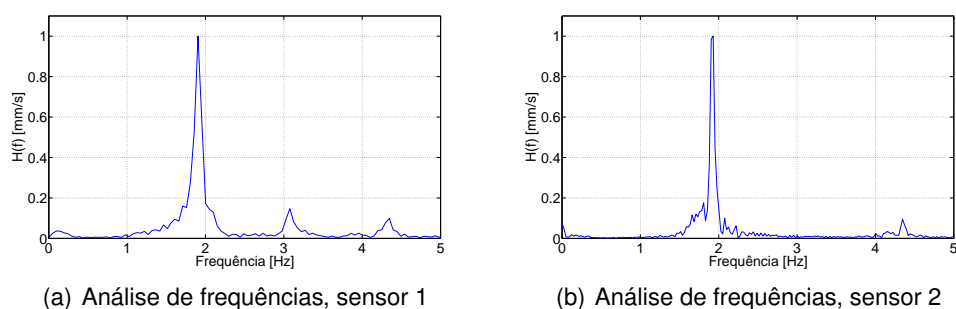


Figura 6.4: Identificação das frequências

Na tabela 6.1 são apresentados os resultados obtidos, identificando a sua média e desvio padrão.

Tabela 6.1: Comparação das frequências naturais da estrutura na direcção vertical

	Frequências medidas [Hz]		Frequências calculadas [Hz]	
	média	desvio padrão	com betuminoso	sem betuminoso
$\omega_1$	1.908	0.009	1.709 (10.4 %)	1.914 (0.3 %)
$\omega_2$	3.076	0.000	2.804 (8.8 %)	3.143 (2.1 %)
$\omega_3$	4.352	0.017	4.117 (5.4 %)	4.628 (6.3 %)

Comparando os resultados das medições com os valores das frequências estimadas através do programa de elementos finitos, é possível concluir que as frequências modeladas apresentam erros relativos de 10.4 %, 8.8 % e 5.4 % para a primeira, segunda e terceira frequências respectivamente.

No entanto, o modelo desenvolvido no programa tem em consideração uma camada de betuminoso do tipo “Slurry” que não se encontra aplicada na ponte em estudo. Assim, desenvolvendo um segundo modelo em SAP2000, sem a consideração desta camada, as frequências naturais da estrutura correspondem a 1.914 Hz, 3.143 Hz e 4.628 Hz o que equivale a um erro de 0.3 %, 2.1 % e 6.3 % para a primeira, segunda e terceira frequência da estrutura, validando assim o modelo desenvolvido.

### Identificação do amortecimento estrutural

O amortecimento é um parâmetro essencial na caracterização de sistemas dinâmicos, que podem ser solicitados por carregamentos próximos das frequências naturais da estrutura. A quantificação do mesmo baseia-se em valores recomendados que dependem do tipo de material utilizado. O valor utilizado na modelação foi de 1 %, pelo que, de maneira a validar este valor, procurou-se estimar o amortecimento associado aos primeiros modos de vibração



vertical da estrutura em estudo, devido a uma acção sincronizada com um salto, por 4 pessoas localizadas a meio de cada vão.

O processamento dos resultados consistiu na obtenção da função de densidade espectral de potência, em velocidades, para as séries discretas nos pontos de registo. Para a estimativa dos coeficientes de amortecimento modais utilizou-se o método da meia potência [42]. A utilização deste método requer que:

- As vibrações tenham densidade espectral aproximadamente constante ou suficientemente uniforme, na vizinhança da frequência de cada modo de vibração do sistema a identificar;
- Os modos de vibração tenham frequências bem separadas;
- Os coeficientes de amortecimento tenham valores pequenos ( $\xi_i \leq 5\%$ ).

A aplicação deste método baseia-se na selecção de 3 pontos. O primeiro corresponde ao pico de ressonância associado a cada modo de vibração, e dois pontos com densidade espectral igual a metade do valor máximo identificado na frequência de ressonância  $\omega_i$ , um à esquerda  $\omega_1$  e outro à direita  $\omega_2$  [43]. A estimativa do amortecimento é efectuada a partir desses pontos através de:

$$\xi_i = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1} \quad (6.1)$$

A precisão deste método depende da resolução em frequência para a determinação dos valores de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , a qual é inversamente proporcional à duração da amostra. Desta forma, no caso de não estarem disponíveis os seus valores, a determinação poderá ser feita através de uma interpolação. Na figura 6.5 apresenta-se a aplicação do método a troços da função de densidade espectral de potência, na vizinhança dos picos correspondentes às frequências de ressonância da estrutura.

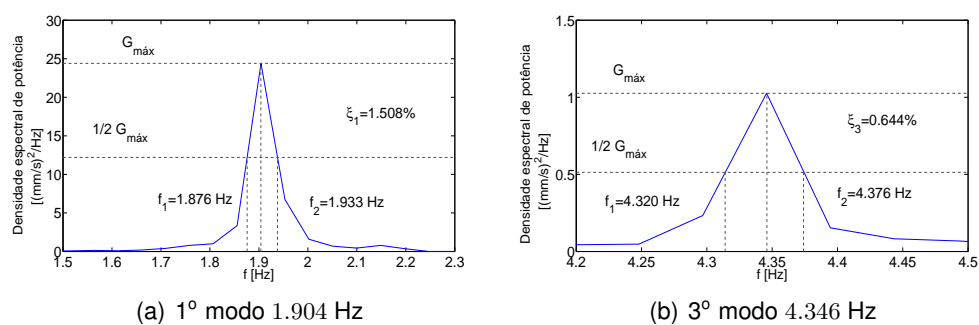


Figura 6.5: Coeficientes de amortecimento modais estimados através do método da meia potência

Nas tabelas 6.2, 6.3 e 6.4, apresentam-se os resultados obtidos com a aplicação

do método da meia potência a todos os ensaios realizados e a respectiva média e desvio padrão associado.

É possível concluir que os valores utilizados no modelo numérico, em comparação com os resultados das medições, são conservativos, pelo menos no que respeita ao primeiro e segundo modos de vibração. A alteração do seu valor resultaria num comportamento da estrutura mais favorável.

Assim, considerando os valores obtidos nas medições, foi desenvolvido um novo modelo numérico de maneira a verificar o comportamento da estrutura. Com esta alteração, os limites impostos apenas são excedidos no caso de uma multidão com uma densidade igual à unidade. De facto, apesar de a amplitude dos carregamentos pedonais aumentar, a capacidade de dissipação de energia aumentou igualmente, levando a que as acelerações máximas diminuam. Por outro lado, apesar da resposta da estrutura ter diminuído, um sistema de controlo deverá ser aplicado, caso a mesma tenha condições para ser solicitada por carregamentos devido a multidões.

Tabela 6.2: Resultados da análise dos dados do sensor 1

1º modo		2º modo		3º modo		Coef. Amortecimento		
$\omega_1$ [Hz]	$\omega_2$ [Hz]	$\omega_1$ [Hz]	$\omega_2$ [Hz]	$\omega_1$ [Hz]	$\omega_2$ [Hz]	$\xi_1$ [%]	$\xi_2$ [%]	$\xi_3$ [%]
1.877	1.938	3.027	3.103	4.310	4.407	1.594	1.238	1.106
1.876	1.938	3.010	3.105	4.314	4.374	1.627	1.546	0.694
1.876	1.936	2.990	3.107	4.355	4.438	1.568	1.916	0.953
1.871	1.941	3.034	3.111	4.282	4.375	1.844	1.252	1.079

Tabela 6.3: Resultados da análise dos dados do sensor 2

1º modo		3º modo		Coef. Amortecimento	
$\omega_1$ [Hz]	$\omega_2$ [Hz]	$\omega_1$ [Hz]	$\omega_2$ [Hz]	$\xi_1$ [%]	$\xi_3$ [%]
1.877	1.940	4.307	4.385	1.649	0.892
1.876	1.943	4.307	4.372	1.755	0.752
1.875	1.944	4.311	4.370	1.815	0.686
1.876	1.933	4.320	4.376	1.508	0.644

Tabela 6.4: Resumo dos coeficientes de amortecimento

	média	desvio padrão
$\xi_1$ [%]	1.670	0.121
$\xi_2$ [%]	1.488	0.319
$\xi_3$ [%]	0.851	0.183

## Capítulo 7

# Conclusão e Desenvolvimentos Futuros

Na presente dissertação foi estudada a influência de uma multidão de peões numa ponte pedonal, simulando o seu comportamento através de um modelo proposto pela Sétra-Guidelines.

O modelo adoptado na quantificação das acções pedonais é considerado um modelo simplificado e determinístico, possibilitando verificar o comportamento da estrutura perante o mesmo. Foi desenvolvido um modelo de maneira a contabilizar a possibilidade de sincronização dos peões com a estrutura e a sincronização entre os mesmos. Assim, através de um número equivalente de peões distribuídos uniformemente ao longo do comprimento da estrutura, é possível simular o efeito que se teria com uma multidão aleatória. No caso em estudo foi avaliada a influência de 3 classes de tráfego diferentes, verificando-se problemas de vibrações excessivas tanto na direcção vertical como lateral.

Este trabalho foi desenvolvido numa fase em que a estrutura se encontrava em construção. Deste modo, desconhecendo a veracidade dos parâmetros adoptados, foram dimensionados dois sistemas de controlo de maneira a atenuar as vibrações decorrentes das acções pedonais.

Uma das soluções mais comuns no controlo de vibrações em pontes pedonais é a aplicação de TMD's. Este tipo de solução, quando posicionada correctamente na estrutura, mostrou-se capaz de gerar um coeficiente de amortecimento até 7 %. No entanto, esta solução apenas é eficaz na frequência para a qual foi sintonizada, pelo que, no caso estudado, é necessário a aplicação de 6 TMD's, com uma massa máxima de 532 Kg, para controlar as vibrações decorrentes da acção pedonal.

De maneira a contornar esta solução foi dimensionado um sistema de controlo activo, através da aplicação de apenas um dispositivo de controlo, com uma massa de 400 Kg, tendo sido verificados os limites de aceleração. Assim, por meio de um actuador capaz de gerar a força necessária de controlo, foi possível controlar todos os modos de vibração considerados. O tipo de actuador a utilizar poderá ser

de diferentes tipos, no entanto terá de ser capaz de fornecer a força de controlo necessária para atenuar as vibrações excessivas na ponte.

O dimensionamento deste tipo de solução foi baseado em especificações dinâmicas e recorrendo ao método de alocação de pólos, foi possível modificar as propriedades dinâmicas de cada modo de vibração. No entanto, não foi possível ter em conta o gasto de energia necessário para o controlo, pelo que um dimensionamento do controlador recorrendo à estratégia do LQR, segundo este ponto de vista, será mais eficiente.

No tipo de solução adoptado, quando inactivo, apenas é possível controlar o primeiro modo passivamente, podendo ser visto como uma vantagem, pois quando activo, a acção de controlo necessária para controlar este modo é inferior. Pelo contrário, nos restantes modos de vibração, quando inactivo, não será produzido qualquer efeito nos mesmos.

Para a concretização deste tipo de controlo, o método utilizado necessita de um observador de estados, que numa situação de implementação, o sinal recebido pelos sensores terá um certo ruído. Este problema não foi considerado, tendo sido adoptada uma solução sem ruído.

Com o trabalho de medições foi possível validar o modelo desenvolvido. No entanto, os resultados em termos de acelerações máximas seriam diferentes dos apresentados. A alteração das frequências devido à camada de betuminoso, e a alteração do amortecimento estrutural, resultaria num aumento da amplitude das funções de carga devido à multidão. Por outro lado, aumentando o amortecimento, a estrutura teria maior capacidade de dissipação de energia, pelo que, efectuando as alterações necessárias, os limites apenas seriam excedidos para o caso em que se considera uma densidade igual à unidade.

Futuramente poderia ser levado a cabo um trabalho de medições na estrutura estudada, considerando um grupo de pessoas a atravessar a mesma e evidenciando os problemas de vibrações excessivas tanto na direcção vertical como lateral.

Relativamente aos dois tipos de soluções estudadas para o controlo de vibrações na ponte pedonal, seria interessante o desenvolvimento de uma terceira solução com 2 actuadores. Estes estariam sintonizados para dois modos de vibração diferentes e a acção de controlo poderia ser condicionada através da definição dos parâmetros “Pre-event”, “Post-event” e “Trigger”, tal como ocorre no equipamento utilizado nas medições, de maneira a funcionar como um sistema ON/OFF.

# Bibliografia

- [1] Miki Kobayashi. Prediction and control of pedestrian induced vibration on an interior footbridge. Master's thesis, Technical University of Denmark, 2011.
- [2] E. Caetano, Á. Cunha, and C. Moutinho. Studies for controlling human-induced vibration of the Pedro e Inês footbridge, Portugal. Part 2: Implementation of tuned mass dampers. *Engineering Structures*, 32:1082 – 1091, 2009.
- [3] E. Caetano, Á. Cunha, and C. Moutinho. Implementation of an active mass damper to control vibrations in a lively footbridge. In *3rd Eccomas thematic conference on smart structures and materials*, 2007.
- [4] F. Venuti and L. Bruno. Crowd-structure interaction in lively footbridges under synchronous lateral excitation: A literature review. *Physics of Life Reviews*, 6:176 – 206, 2009.
- [5] S. Zivanović, A. Pavić, and P. Reynolds. Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review. *Journal of Sound and Vibration*, 279:1 – 74, 2005.
- [6] F. Hauksson. Dynamic behaviour of footbridges subjected to pedestrian-induced vibrations. Master's thesis, Lund University, 2005.
- [7] Setra/AFGC. Footbridges: Assessment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading. In *Technical guide*, 2006.
- [8] C. Moutinho. Controlo passivo e activo de vibrações em pontes pedonais. Master's thesis, Faculdade de Engenharia Universidade do Porto, 1998.
- [9] C. Pastia, F. Chira, V. Rosca, and et al. Structural control systems implemented in civil engineering. *Buletinul Institutului Politehnic Din Iasi*, 1-2, 2005.
- [10] Hongnan Li and Linsheng Huo. Advances in structural control in civil engineering in China. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2010:23, 2010.

- [11] Z. Wu. Active control in bridge engineering. *Bridge Engineering Handbook*, 2000.
- [12] T.K.Datta. A state-of-the-art review on active control of structures. *Journal of Earthquake Technology, ISET*, vol. 40:1–17, 2003.
- [13] Lyan-Ywan Lu. Predictive control of seismic structures with semi-active friction dampers. *Earthquake engineering and structural dynamics*, vol. 33:647–668, 2004.
- [14] P. Dallard, A.J. Fitzpatrick, A. Flint, and et al. The London Millenium Bridge. *The Structural Enginner*, vol. 79:22, 2001.
- [15] SYNPEX. Advanced load models for synchronous pedestrian excitation and optimised design guidelines for steel footbridges. Technical report, European Commission, 2008.
- [16] S. Zivanović, A. Pavić, and T. Ingólfsson. Modelling spatially unrestricted pedestrian traffic on footbridges. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 136:1296–1308, 2010.
- [17] J.E. Wheeler. Prediction and control of pedestrian induced vibration in footbridges. *Journal of Structural Division (ASCE)*, ST9:2045–2065, 1982.
- [18] Y. Matsumoto, T. Nishioka, H. Shiojiri, and K. Matsuzaki. Dynamic design of footbridges. *IABSE Proceedings*, vol. 17/18:1–15, 1978.
- [19] S. Zivanović and A. Pavić. Quantification of dynamic excitation potential of pedestrian population crossing footbridges. *Shock and Vibration*, 18/4:563–577, 2011.
- [20] V. Racic, A. Pavic, and J.M.W.Brownjohn. Experimental identification and analytical modelling of human walking forces: Literature review. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 326:1–49, 2009.
- [21] J. Kala, M. Bajer, J. Barnat, J. Smutný, and et al. Experimental approach of the single pedestrian induced excitation. *Slovak Journal of Civil Engineering*, 4:14–20, 2010.
- [22] J. Brownjohn, S. Zivanovic, and A. Pavic. Crowd Dynamic Loading on Footbridges. In *footbridge 2008, third international conference*, 2008.
- [23] G. Sedlacek, C. Heinemeyer, C. Butz, and et al. Design of Lightweight Footbridge for Human Induced Vibrations. Technical report, JRC Scientific and Technical Reports, 2009.
- [24] Y. Fujino, B.M. Pacheco, S. Nakamura, and P. Warnitchai. Synchronization of human walking observed during lateral vibration of a congested pedestrian bridge. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 22:741–758, 1993.

- [25] Eurocode 0, Eurocode Basis of Structural Design. *EN1990:2002, European Committee for Standardization, Brussels*, 2003.
- [26] Eurocode 5, Design of Timber Structures - Part 2: Bridges. *EN1995-2:2004, European Committee for Standardization, Brussels*, 2004.
- [27] Steel, Concrete and Composite Bridges Part 2: Specification for loads; Appendix C: Vibration Serviceability Requirements for Foot and Cycle Track Bridges. *BS 5400. UK: British Standards Association, London*, 1978.
- [28] Ontario Ministry of Transportation. Ontario Highway Bridge Design Code. *Toronto*, 1983.
- [29] E.L. Wilson and A. Habibullah. SAP2000, Structural Analysis Program. *Computers and Structures Inc., California, USA*, 1995.
- [30] MathWorks I. Matlab: The Language of Technical Computing. *MathWorks*, 2005.
- [31] C. M. Casado, I. M. Díaz, V. Alfonso, and et. al. Implementation of passive and active vibration control on an in-service footbridge. *Structural Control and Health Monitoring*, 2011.
- [32] Singiresu S. Rao. *Mechanical Vibrations*. Pearson Prentice Hall, Fourth Edition, 2004.
- [33] F. Sadek and B. Mohraz. A method of estimating the parameters of tuned mass dampers for seismic applications. *Earthquake engineering and structural dynamics*, vol. 26:617–635, 1997.
- [34] J. H. Bonsel. Application of a dynamic vibration absorber to a piecewise linear beam system. Master's thesis, Eindhoven University of Technology, 2003.
- [35] K. Jakobsen and P. Olsen. Damping of structures. Master's thesis, Aalborg Universitet, 2007/08.
- [36] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, Inc., 2nd edition, 1990.
- [37] Leonardo Rodrigues. Estudo de estratégias de controlo activo de vibrações para um edifício de dois andares. Master's thesis, FCT/UNL, 2011.
- [38] Ashish Tewari. Modern Control Design with MATLAB and SIMULINK. *John Wiley & Sons, 2 edition*, 2002.
- [39] C. Moutinho. *Controlo de vibrações em estruturas de engenharia civil*. PhD thesis, Departamento de engenharia civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2007.

- [40] Daniela Marinova and Vasil Marinov. Numerical design of optimal active control for seismically-excited building structures. In *Numerical Analysis and Its Applications*, volume 3401, pages 408–415. Springer Berlin / Heidelberg, 2005.
- [41] Ziegler Consultants. *View 2002 Users Manual*. Syscom Instruments S.A.
- [42] Shih Hoi Wai. *Damage assessment in structures using vibration characteristics*. PhD thesis, Queensland University of Technology, 2009.
- [43] Paulo Mendes and Sérgio Oliveira. *Análise Dinâmica de Estruturas - Utilização Integrada de Modelos de Identificação Modal e Modelos de Elementos Finitos*, Edições LNEC, livro da colecção ITB-DDB, 2008.
- [44] Anil K. Chopra. *Dynamics of structures*. Prentice-Hall, 1995.
- [45] Rui Neves da Silva. Teoria de sistemas - texto de apoio à disciplina. *FCT/UNL*, 2011.



## Apêndice A

# Cálculo das frequências naturais da estrutura

O objectivo deste anexo é verificar as primeiras frequências naturais do modelo computacional na direcção vertical. Para isso, é necessário calcular analiticamente as matrizes de massa e de rigidez de um modelo simplificado. O modelo adoptado encontra-se representado no figura A.1. Foram considerados 5 graus de liberdade, entre eles, as translações a meio vão e as duas rotações nos apoios.

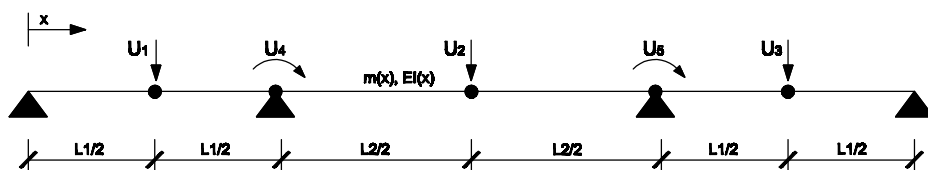


Figura A.1: Modelo analítico utilizado para o cálculo das frequências naturais na direcção vertical

Assim, foi assumido que os modos de vibração apresentam uma função de forma  $\psi(x)$  aproximados por uma equação polinomial do 4º grau, sendo que os deslocamentos ao longo do tempo podem ser determinados por  $u(x, t) = \psi(x) z(t)$  [44].

O cálculo das funções de forma foi efectuado dividindo a estrutura em 3 troços. A determinação das constantes da função podem ser obtidas através das condições de fronteira. Assim, tendo em conta as condições cinemáticas e estáticas, é apresentado na figura A.2 as respectivas funções de forma adoptadas para cada grau de liberdade considerado.

$$\psi(0) = 0 \quad EI\psi''(0) = 0$$

$$\psi(L1) = 0 \quad \psi(L1 + L2) = 0$$

$$\psi(2L1 + L2) = 0 \quad EI\psi''(2L1 + L2) = 0$$

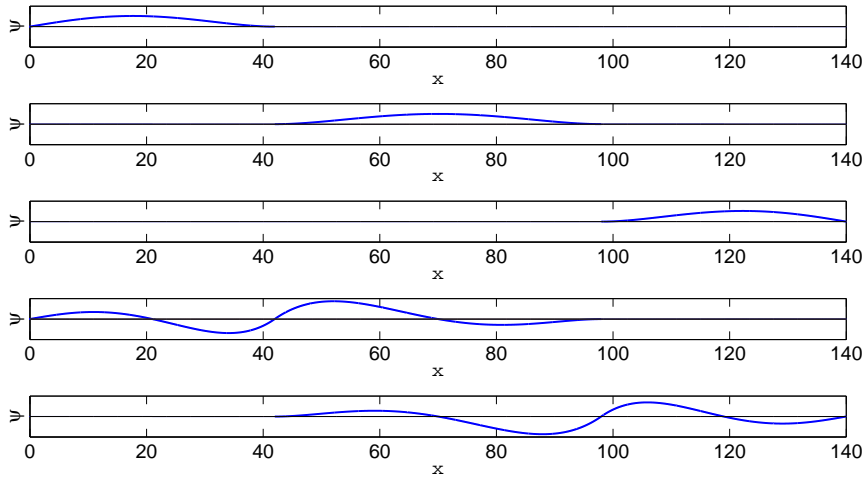


Figura A.2: Funções de forma adoptadas para os graus de liberdade  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $U_4$  e  $U_5$  respectivamente

O cálculo da matriz de rigidez e de massa foi efectuado segundo as equações 3.4 e 3.3, e após se efectuar uma condensação das mesmas, para os graus de liberdade  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ , obteve-se:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 15322.80 & 6594.17 & 771.26 \\ 6594.17 & 13589.80 & 6592.5 \\ 771.26 & 6592.50 & 15320.4 \end{bmatrix} \text{ KN/m} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 38.02 & -2.46 & 0 \\ -2.46 & 38.101 & -2.45 \\ 0 & -2.45 & 37.89 \end{bmatrix} \text{ ton} \quad (\text{A.1})$$

Por meio da equação 3.2, é possível calcular os modos de vibração e as respectivas frequências:

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} -0.47 & -0.71 & 0.53 \\ 0.75 & -0.002 & 0.67 \\ -0.47 & 0.71 & 0.53 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1.82 \\ 3.12 \\ 4.22 \end{bmatrix} \text{ Hz} \quad (\text{A.2})$$

## Apêndice B

# Função de Transferência

Define-se função de transferência de um sistema dinâmico linear invariante no tempo como a função que relaciona as transformadas de Laplace dos sinais de entrada e de saída do sistema. Assim, considerando o sistema definido pela equação:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u \quad (\text{B.1})$$

onde  $y(t)$  é a saída do sistema e  $u(t)$  a entrada, a função de transferência  $G(s)$  é obtida através da aplicação da transformada de Laplace a ambos os membros, admitindo condições iniciais nulas:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (\text{B.2})$$

assim, através da equação B.2, conclui-se que uma função de transferência de um sistema é um modelo matemático que relaciona as variáveis de saída com as variáveis de entrada, pelo que é uma propriedade do sistema independente da magnitude ou tipo de solicitação externa[36]. Assim, não fornece qualquer informação sobre a estrutura física do sistema. É possível verificar, que a maior potência do denominador é igual à ordem do termo da maior derivada da saída do sistema, concluindo-se que a ordem do sistema é dada pela maior potência de  $s$  no denominador[37].

Assim, usando o princípio da função de transferência é possível representar um sistema dinâmico através das equações algébricas no domínio de Laplace  $s$ . Considerando um sistema representado na forma de espaço de estados, conforme as equações 4.14a e 4.14b, e utilizando a transformada de Laplace obtém-se:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \quad (\text{B.3a})$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s) \quad (\text{B.3b})$$

Tendo em conta as condições iniciais nulas, e multiplicando ambos os membros por  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ :

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(s) \quad (\text{B.4})$$

substituindo em B.3b:

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{u}(s) \quad (\text{B.5})$$

pelo que, a equação  $[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}]$ , é a equação de transferência que nos permite relacionar o vector de saída  $\mathbf{Y}(s)$  com o vector de entrada  $\mathbf{U}(s)$ . Sabendo que:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (\text{B.6})$$

a função de transferência toma a forma:

$$G(s) = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| \mathbf{D}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \quad (\text{B.7})$$

O comportamento dinâmico de um sistema é realizado através da análise da função de transferência observando a posição das raízes do numerador e do denominador.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{B.8})$$

As  $m$  raízes do numerador designam-se por zeros da função de transferência, e as  $n$  raízes do denominador designam-se por pólos. A posição dos mesmos condicionam o comportamento do sistema. A representação dos pólos e zeros é feita através do diagrama de Argand, que consiste num plano cartesiano onde as ordenadas e as abcissas representam a parte imaginária e a parte real respectivamente.

Assim, analisando o denominador da função de transferência conclui-se que as raízes do mesmo se obtêm igualando a zero:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{B.9})$$

pelo que, os valores próprios da matriz de estado correspondem aos pólos da função de transferência. Se um dos valores próprios se situar no semi-plano direito do diagrama o sistema é instável, e por isso, quando sujeito a uma solicitação não têm capacidade de voltar à posição de equilíbrio. Um sistema é estável no sentido assintótico se todos os seus pólos estiverem à esquerda do eixo imaginário [45].

## Apêndice C

# Equações do movimento em coordenadas modais

Considerando a equação do movimento definida por:

$$M_n \ddot{\mathbf{q}} + C_n \dot{\mathbf{q}} + K_n \mathbf{q} = \mathbf{F}_n(t) + \mathbf{F}_{c,n} \mathbf{u}(t) \quad (\text{C.1})$$

onde:

$$M_n = \phi_d^T M_s \phi_d = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$C_n = \phi_d^T C_s \phi_d = \begin{bmatrix} c_{11} & -c_{12} \\ -c_{12}^T & c_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$K_n = \phi_d^T K_s \phi_d = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} \\ -k_{12}^T & k_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{F}_n(t) = \phi_d^T \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{f}(t) \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{F}_{c,n} = \phi_d^T \mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} \phi_k^j \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

e considerando que o termo  $\phi_k^j$  corresponde à  $k$  componente do modo  $j$ , de maneira que:

$$\phi_k^j = \mathbf{e}_c^T \phi^j = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \phi^j \quad (\text{C.7})$$

os termos da equação C.1 podem ser reescritos por:

$$m_{11} = \begin{bmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_i \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 M_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2\xi_n\omega_n M_n & \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \phi_k^1 \phi_k^1 & \dots & \phi_k^1 \phi_k^n \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_k^n \phi_k^1 & \dots & \phi_k^n \phi_k^n \end{bmatrix} \quad (C.9)$$

$$c_{12} = c_2 \begin{bmatrix} \phi_k^1 \\ \vdots \\ \phi_k^n \end{bmatrix} \quad (C.10)$$

$$k_{11} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 M_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \omega_n^2 M_n & \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} \phi_k^1 \phi_k^1 & \dots & \phi_k^1 \phi_k^n \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_k^n \phi_k^1 & \dots & \phi_k^n \phi_k^n \end{bmatrix} \quad (C.11)$$

$$k_{12} = k_2 \begin{bmatrix} \phi_k^1 \\ \vdots \\ \phi_k^n \end{bmatrix} \quad (C.12)$$

em que  $m_2$ ,  $k_2$  e  $c_2$  é a massa, rigidez e amortecimento do AMD respectivamente, e uma vez que os modos de vibração foram normalizados por forma a possuírem uma componente unitária no ponto de aplicação do AMD, o cálculo da resposta em termos de coordenadas geométricas pode ser efectuado através da equação:

$$z(t) = \phi_d q(t) \quad (C.13)$$

onde  $\phi_d$  é,

$$\phi_d = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (C.14)$$

Assim, posicionando o AMD em  $x = 22.7$  m, com as propriedades da tabela 5.7, e tendo em conta que a estrutura nesse mesmo ponto tem componentes modais de 0.035941, 0.09842 e 0.09113 para o primeiro, segundo e terceiro modo de vibração respectivamente, os termos da equação C.1, são definidos por:

$$M_n = \begin{bmatrix} 774.14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 103.24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 120.41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} [\text{ton}] \quad (C.15)$$

$$K_n = \begin{bmatrix} 8274.5 & 4.269 & 4.269 & -4.269 \\ 4.269 & 2122.4 & 4.269 & -4.269 \\ 4.269 & 4.269 & 2803.8 & -4.269 \\ -4.269 & -4.269 & -4.269 & 4.269 \end{bmatrix} [\text{KN/m}] \quad (C.16)$$

$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} 50.642 & 0.036 & 0.036 & -0.036 \\ 0.036 & 9.389 & 0.036 & -0.036 \\ 0.036 & 0.036 & 11.648 & -0.036 \\ -0.036 & -0.036 & -0.036 & 0.036 \end{bmatrix} [\text{KN.s/m}] \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{F}_{c,n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [\text{KN}] \quad (\text{C.18})$$

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} 1.9127 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7006 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7976 \end{bmatrix} [\text{KN}] \quad (\text{C.19})$$

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \sin(3.269t) \\ \sin(4.529t) \\ \sin(4.821t) \end{bmatrix} [\text{rad/s}] \quad (\text{C.20})$$





## Apêndice D

# Aproximação dos modos de vibração da estrutura

Tal como referido, o dimensionamento de um amortecedor de massa sintonizada requer o conhecimento da amplitude da força de excitação em termos de coordenadas modais. De facto, tendo em conta a expressão:

$$F_0 = \int_0^L F(t)\psi_i(x)dx \quad (D.1)$$

é necessário conhecer a respectiva configuração  $\psi_i(x)$  do modo  $i$ . Assim, por meio do programa de elementos finitos Sap2000, determinou-se em diversos pontos da estrutura a respectiva componente modal do modo de vibração  $i$  de maneira a conseguir aproximar o mesmo por uma função polinomial do 4º grau dada por:

$$\psi_i(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \quad (D.2)$$

Neste contexto, a estrutura é discretizada em 3 partes, os 3 vãos que perfazem os 140 metros de comprimento, conforme a figura D.1, e tendo em conta as condições de fronteira e os valores dos diferentes modos de vibração em diversos pontos da estrutura é possível o cálculo dos coeficientes da equação D.2.

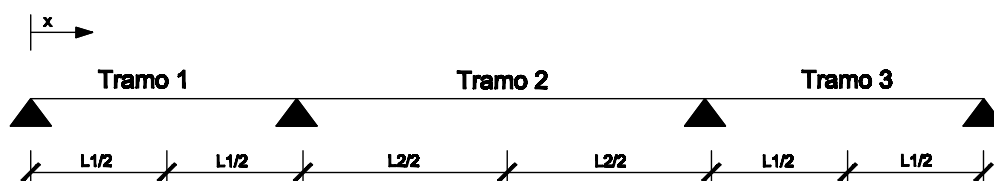


Figura D.1: Divisão da estrutura para efeitos de cálculo dos modos de vibração

Na tabela D.1 é apresentado os valores dos coeficientes obtidos para cada situação de cálculo considerada, efectuando o mesmo procedimento para os três primeiros modos laterais e o primeiro modo vertical.

Tabela D.1: Coeficientes da função polinomial

Caso		$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\int_0^L \psi_i(x) dx$
Modo 1	Tramo 1	$-2.720E-04$	$-2.369E-04$	$-8.699E-06$	$2.367E-06$	$-1.919E-08$	5.922
	Tramo 2	$1.541E+00$	$-1.142E-01$	$2.918E-03$	$-3.003E-05$	$1.073E-07$	
	Tramo 3	$-1.089E+00$	$6.593E-02$	$-1.134E-03$	$7.572E-06$	$-1.741E-08$	
Modo 2	Tramo 1	$1.020E-03$	$7.731E-03$	$8.063E-05$	$-1.484E-05$	$2.033E-07$	5.939
	Tramo 2	$1.209E+00$	$-6.112E-02$	$1.051E-03$	$-7.109E-06$	$1.494E-08$	
	Tramo 3	$3.935E+01$	$1.366E+00$	$-1.746E-02$	$9.734E-05$	$-1.999E-07$	
Modo 3	Tramo 1	$-1.030E-03$	$-7.547E-03$	$-8.506E-05$	$1.586E-05$	$-2.276E-07$	6.261
	Tramo 2	$2.283E+00$	$1.506E-01$	$-3.558E-03$	$3.549E-05$	$-1.269E-07$	
	Tramo 3	$-4.743E+01$	$1.624E+00$	$-2.054E-02$	$1.135E-04$	$-2.316E-07$	
Modo 5	Tramo 1	$-2.089E-06$	$4.169E-03$	$4.613E-05$	$-7.016E-06$	$8.461E-08$	6.602
	Tramo 2	$-1.557E+00$	$1.133E-01$	$-2.861E-03$	$2.931E-05$	$-1.047E-07$	
	Tramo 3	$1.474E+01$	$-5.332E-01$	$7.049E-03$	$-4.036E-05$	$8.460E-08$	

## Apêndice E

# Rotinas em Matlab

### Função de carga direcção vertical

```
% fp - frequência da passada
% N - nº de pessoas
L=140;
B=4.5;
f=input('introduzir valor de fp: ')
d=input('introduzir valor da densidade: ')
%-----
G=700;          % Peso estático
alpha=0.4;      % DLF
t=0:0.01:150;   % Tempo
%-----
N=d*L*B
%-----número equivalente de peões-----
if d<1
    neq=10.8*(N*1/100)^(1/2)
else
    neq=1.85*sqrt(N)
end
    if f<=1
        phi=0
    elseif f<1.7
        phi=1/0.7*f-1/0.7
    elseif f<2.1
        phi=1
    elseif f<2.6
        phi=-2*f+5.2
    else
        phi=0
    end
end
```

```

Forca=neq*phi*G*alpha/L
y1=neq*phi/L*(G*alpha*sin(2*pi*f*t));
plot(t,y1)

```

### Função de carga direcção lateral

```

% fp - frequência da passada
% n - nº de pessoas
L=140;
B=4.5;
f=input('introduzir valor de fl: ')
d=input('introduzir valor da densidade: ')
%-----
G=700;           % Peso estático
alpha=0.05;      % DLF
t=0:0.01:150;    % Tempo
%-----
N=d*L*B
%-----número equivalente de peões-----
if d<1
    neq=10.8*(N*1/100)^(1/2)
else
    neq=1.85*sqrt(N)
end
    if f<=0.3
        phi=0
    elseif f<0.5
        phi=5*f-1.5
    elseif f<1.1
        phi=1
    elseif f<1.3
        phi=-5*f+6.5
    else
        phi=0
    end
Forca=neq*phi*G*alpha/L
y1=neq*phi/L*(G*alpha*sin(2*pi*f*t));
plot(t,y1)

```

### Representação em espaço de estados sem AMD

```

clearvars
%----- 1º Modo-----
P1=0.11918;           % Ponto máximo

```

```

Mn=1; % Massa normalizada
f1=0.52024; % Frequência Hz
w1=2*pi*f1;
psi=0.01; % Coeficiente de Amortecimento
C1=2*psi*w1; % Amortecimento normalizado
F1=5.92168; % Força normalizada
A1=11.6087*1E-3*F1; % Amplitude da força de excitação
%----- 2º Modo-----
P2=0.10100; % Ponto máximo
M2=1; % Massa normalizada
f2=0.72087; % Frequência Hz
w2=2*pi*f2;
C2=2*psi*w2; % Amortecimento normalizado
F2=5.93953; % Força normalizada
A2=11.6087*1E-3*F2; % Amplitude da força de excitação
%----- 3º Modo-----
P3=0.09784; % Ponto máximo
M3=1; % Massa normalizada
f3=0.76735; % Frequência Hz
w3=2*pi*f3;
C3=2*psi*w3; % Amortecimento normalizado
F3=6.26102; % Força normalizada
A3=11.6087*1E-3*F3; % Amplitude da força de excitação
%----- Espaço de Estados-----
A=[0,0,0,1,0,0;
    0,0,0,0,1,0;
    0,0,0,0,0,1;
    -w1^2,0,0,-C1,0,0;
    0,-w2^2,0,0,-C2,0;
    0,0,-w3^2,0,0,-C3];
B=[0,0,0;
    0,0,0;
    0,0,0;
    A1,0,0;
    0,A2,0;
    0,0,A3];
C=[-w1^2,0,0,-C1,0,0;
    0,-w2^2,0,0,-C2,0;
    0,0,-w3^2,0,0,-C3];
D=[A1,0,0;
    0,A2,0;
    0,0,A3];
modal=[P1,0,0;
    0,P2,0;

```

```
0,0,P3];
```

### Dimensionamento do Controlador com condições iniciais

```
clearvars
%-----modos de vibração-----
phi=[-0.03519,0.10177,-0.09573;
      0.035941,0.09842,-0.09113;
      -0.03465,-0.09996,-0.09784];
%-----Propriedades do AMD-----
cd=0.036351;
md=0.4;
kd=4.268858;
%-----Propriedades da estrutura-----
M1=1/(phi(2,1))^2;           % Massa modal 1º modo
M2=1/(phi(2,2))^2;           % Massa modal 2º modo
M3=1/(phi(2,3))^2;           % Massa modal 3º modo
psi1=0.01;                   % Coeficiente de amortecimento
w1=0.5202*2*pi;              % Frequência 1º modo (rad/s)
w2=0.7209*2*pi;              % Frequência 2º modo (rad/s)
w3=0.7674*2*pi;              % Frequência 3º modo (rad/s)
M11=[M1,0,0;
      0,M2,0;
      0,0,M3];
C11=[2*psi1*w1*M1,0,0;
      0,2*psi1*w2*M2,0;
      0,0,2*psi1*w3*M3]+ones(3)*cd;
C12=cd*[1;1;1];
K11=[w1^2*M1,0,0;
      0,w2^2*M2,0;
      0,0,w3^2*M3]+kd*ones(3);
K12=kd*[1;1;1];

Mn=[M11,[0;0;0];0,0,0,md];   % Matriz de massa
Cn=[C11,-C12;-C12',cd];      % Matriz de amortecimento
Kn=[K11,-K12;-K12',kd];      % Matriz de rigidez
%-----ESPAÇO DE ESTADOS-----
Aoo=zeros(4);
Aol=eye(4);
Alo=-Mn^(-1)*Kn;
A11=-Mn^(-1)*Cn;
A=[Aoo,Aol;Alo,A11];
Fc=[1;1;1;-1];               % Força de controlo
Boo=[0;0;0;0];
```

```

B11=[Mn^(-1)*Fc];
B=[Boo;B11];
C=eye(8);
D=zeros(8,1);
xInitial=[1 1 1 0 0 0 0 0]';
pc=[-0.2584+3.2196i,-0.2584-3.2196i,-0.2640+3.2894i,
-0.2640-3.2894i,-0.2270+4.5343i,-0.2270-4.5343i,
-0.2415+4.8240i,-0.2415-4.8240i];
K=place(A,B,pc); % Vector de ganho do controlador
%-----Controlabilidade e Observabilidade-----
Cr=[B A*B A^2*B A^3*B A^4*B A^5*B A^6*B A^7*B];
Or=[C' A'*C' (A')^2*C' (A')^3*C' (A')^4*C'
(A')^5*C' (A')^6*C' (A')^7*C'];
H=rank(Cr);
O=rank(Or);

```

### Dimensionamento do Observador com condições iniciais

```

clearvars
%-----modos de vibração-----
phi=[-0.03519,0.10177,-0.09573;
      0.035941,0.09842,-0.09113;
      -0.03465,-0.09996,-0.09784];
%-----Propriedades do AMD-----
cd=0.036351;
md=0.4;
kd=4.268858;
%-----Propriedades da estrutura-----
M1=1/(phi(2,1))^2; % Massa modal 1º modo
M2=1/(phi(2,2))^2; % Massa modal 2º modo
M3=1/(phi(2,3))^2; % Massa modal 3º modo
psi1=0.01; % Coeficiente de amortecimento
w1=0.5202*2*pi; % Frequência 1º modo (rad/s)
w2=0.7209*2*pi; % Frequência 2º modo (rad/s)
w3=0.7674*2*pi; % Frequência 3º modo (rad/s)
M11=[M1,0,0;
      0,M2,0;
      0,0,M3];
C11=[2*psi1*w1*M1,0,0;
      0,2*psi1*w2*M2,0;
      0,0,2*psi1*w3*M3]+ones(3)*cd;
C12=cd*[1;1;1];
K11=[w1^2*M1,0,0;
      0,w2^2*M2,0;

```

```

    0,0,w3^2*M3]+kd*ones(3);
K12=kd*[1;1;1];

Mn=[M11,[0;0;0];0,0,0,md];           % Matriz de massa
Cn=[C11,-C12;-C12',cd];               % Matriz de amortecimento
Kn=[K11,-K12;-K12',kd];               % Matriz de rigidez
%-----ESPAÇO DE ESTADOS-----
Aoo=zeros(4);
Aol=eye(4);
Alo=-Mn^(-1)*Kn;
A11=-Mn^(-1)*Cn;
A=[Aoo,Aol;Alo,A11];
Fc=[1;1;1;-1];                       % Força de controlo
Booc=[0;0;0;0];
B11c=[Mn^(-1)*Fc];
B=[Booc;B11c];
C=[Alo,A11];
D=[B11c];
%-----Pólos do controlador-----
pc=[-0.2584+3.2196i,-0.2584-3.2196i,-0.2640+3.2894i,
-0.2640-3.2894i,-0.2270+4.5343i,-0.2270-4.5343i,
-0.2415+4.8240i,-0.2415-4.8240i];
%-----Pólos do observador-----
po=[-3.23*2,-3.23,-3.3,-3.3,-4.54*2,-4.54,-4.83*2,-4.83]*2;
K=place(A,Bc,pc); % Vector de ganho do Controlador
Ke=place(A',C',po)'; % Matriz de ganho do Observador
xInitial=[1 1 1 0 0 0 0 0]';

```

### Resposta da estrutura com AMD para os carregamentos

```

clearvars
%-----modos de vibração-----
phi=[-0.03519,0.10177,-0.09573;
      0.035941,0.09842,-0.09113;
      -0.03465,-0.09996,-0.09784];
%-----Propriedades do AMD-----
cd=0.036351;
md=0.4;
kd=4.268858;
%-----Propriedades da estrutura-----
M1=1/(phi(2,1))^2;           % Massa modal 1º modo
M2=1/(phi(2,2))^2;           % Massa modal 2º modo
M3=1/(phi(2,3))^2;           % Massa modal 3º modo
psil=0.01;                   % Coeficiente de amortecimento

```



```

w1=0.5202*2*pi;           % Frequência 1º modo (rad/s)
w2=0.7209*2*pi;           % Frequência 2º modo (rad/s)
w3=0.7674*2*pi;           % Frequência 3º modo (rad/s)
M11=[M1,0,0;
      0,M2,0;
      0,0,M3];
C11=[2*psi1*w1*M1,0,0;
      0,2*psi1*w2*M2,0;
      0,0,2*psi1*w3*M3]+ones(3)*cd;
C12=cd*[1;1;1];
K11=[w1^2*M1,0,0;
      0,w2^2*M2,0;
      0,0,w3^2*M3]+kd*ones(3);
K12=kd*[1;1;1];
%-----Forças pedonais-----
F1=5.92168*1/phi(2,1);
F2=5.93953*1/phi(2,2);
F3=6.26102*1/phi(2,3);
A1=11.6087*1E-3*F1;
A2=11.6087*1E-3*F2;
A3=11.6087*1E-3*F3;

Mn=[M11,[0;0;0];0,0,0,md];      % Matriz de massa
Cn=[C11,-C12;-C12',cd];          % Matriz de amortecimento
Kn=[K11,-K12;-K12',kd];          % Matriz de rigidez
%-----ESPAÇO DE ESTADOS-----
Aoo=zeros(4);
Aol=eye(4);
Alo=-Mn^(-1)*Kn;
A11=-Mn^(-1)*Cn;
A=[Aoo,Aol;Alo,A11];

Fc=[1;1;1;-1];                 % Força de controlo
Booc=[0;0;0;0];
B11c=[Mn^(-1)*Fc];
Bc=[Booc;B11c];                 % Matriz B do controlo
Dc=[B11c];                      % Matriz D do controlo
Booe=zeros(4,3);
B11e=[A1/M1,0,0;0,A2/M2,0;0,0,A3/M3;0,0,0];
Bex=[Booe;B11e];                % Matriz B das solicitações
Dex=[B11e];                     % Matriz D das solicitações
C=[Alo,A11];                    % Matriz de saída
%-----Pólos do controlador-----
pc=[-0.2584+3.2196i,-0.2584-3.2196i,-0.2640+3.2894i,

```

```
-0.2640-3.2894i,-0.2270+4.5343i,-0.2270-4.5343i,  
-0.2415+4.8240i,-0.2415-4.8240i];  
%-----Pólos do observador-----  
po=[-3.23*2,-3.23,-3.3,-3.3,-4.54*2,-4.54,-4.83*2,-4.83]*2;  
K=place(A,Bc,pc);           % Vector de ganho do Controlador  
Ke=place(A',C',po)';       % Matriz de ganho do Observador
```